ALGEBRA E "D INTORNI" NELLA SCUOLA PRIMARIA

Le finalità didattiche di questo percorso sono quelle di favorire elasticità e dinamismo mentale, abitudine al pensiero astratto, e la formazione di basi per un pensiero creativo (capacità di strutturare / destrutturare , di riconoscere, entrare e uscire dai confini, di porsi da diversi punti di vista, di immaginare situazioni e mondi ipotetici con però rigorose logiche interne).

L'itinerario può essere proposto dalla seconda classe elementare in su.

Alcuni pre-requisiti e accorgimenti sono necessari: saper svolgere operazioni con un operatore mancante, saper operare su assi cartesiani (per le rappresentazioni grafiche), rappresentazione della moltiplicazione con il punto anziché con il segno "x".

Espongo un già sperimentato itinerario didattico per avvicinare gli alunni all'algebra (e al pensiero creativo).

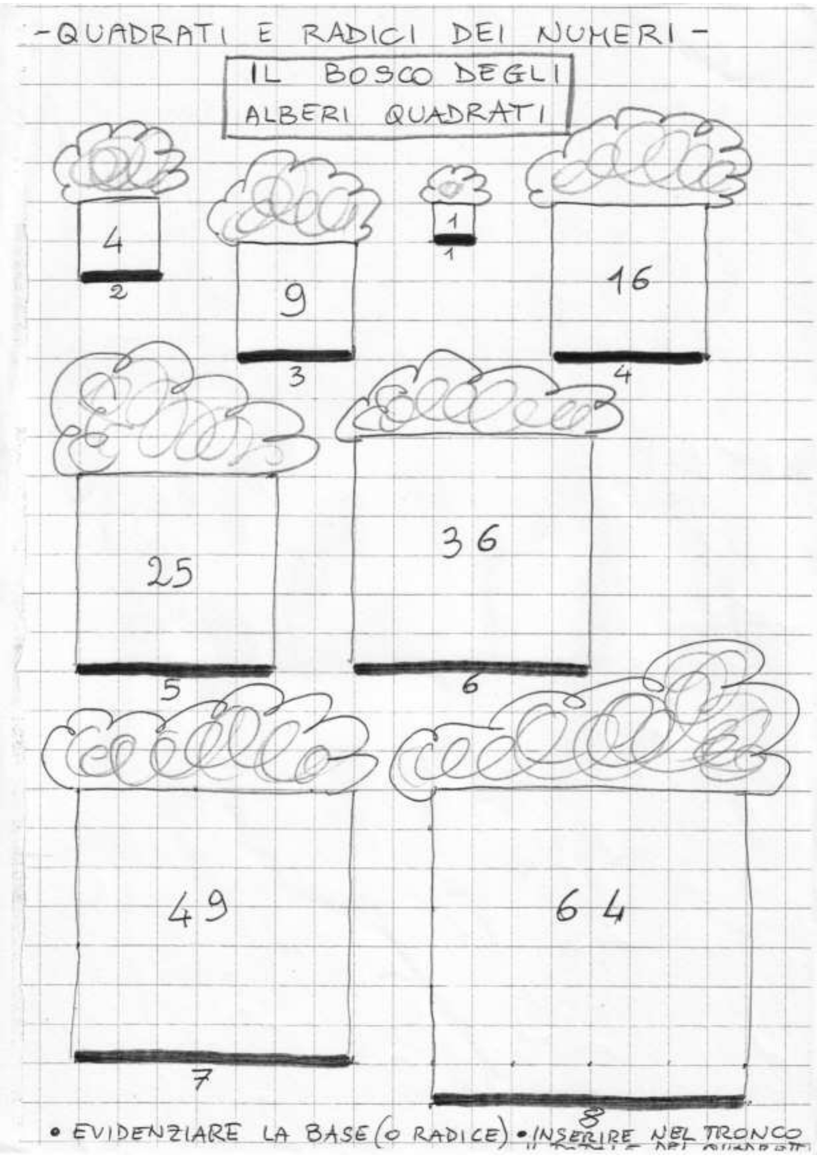
- **L'algebra** può essere un itinerario idoneo alla formazione di un pensiero astratto, permette di dare "concretezza" a numeri momentaneamente non ancora conosciuti, permette l'esplorazione delle proprietà dei numeri, permette di formulare relazioni di interdipendenza (se… allora). L'alunno sviluppa curiosità e spirito di scoperta verso i numeri e verso le relazioni tra gli stessi.; algebra è parola di origine araba che vuol dire "trasporto" (Al-jabr era il titolo del libro del grande matematico arabo del nono secolo, Al Khawarizmi, che tra l'altro introdusse la conoscenza del numero 0 indiano in occidente).
- **La formazione del pensiero creativo** mi sembra invece ancora agli albori, un territorio sconfinato che non ha ancora messo a punto percorsi sufficientemente idoneii, organici, dettagliati in campo scolastico (e non solo)

Questo percorso di sperimentazione didattica comprende:

- Quadrati e radici dei numeri
- Infinito e zero
- Numeri sottozero (negativi)
- Dall'operatore mancante ai numeri segreti (equazioni)
- Operare con più numeri segreti
- Rappresentazione grafica delle equazioni
- (Equazioni di secondo grado e loro rappresentazione grafica)
- Multibase e base 16
- Operare con codici numerici diversi
- Sequenze
- Geometrie non euclidee

QUADRATI DEI NUMERI

Ho presentato agli alunni inizialmente **l'elevamento al quadrato** di numeri da uno a dieci, per arricchire la quantità di operazioni da far svolgere quotidianamente. Sono partito dal **materiale multibase** presentando e facendo manipolare, disegnare e successivamente rappresentare con i numeri i quadrati delle basi da uno a dieci

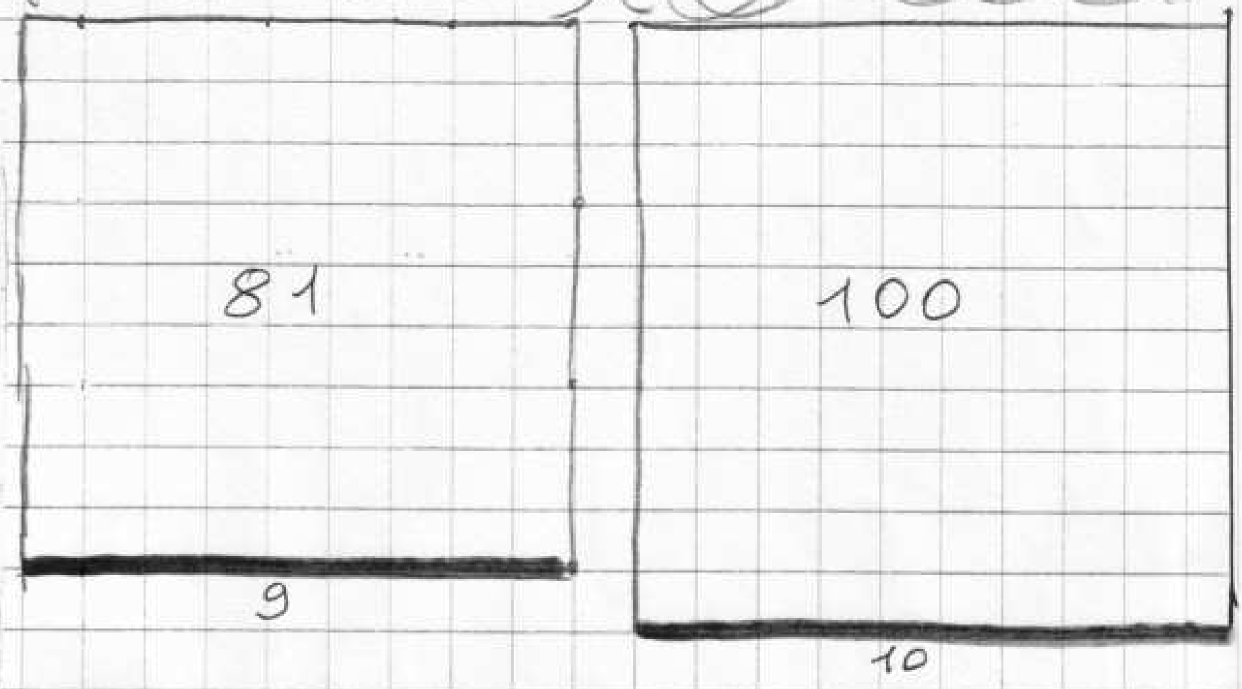


Nel multibase i quadrati sono chiamati "piatti", ma chiamarli quadrati offre più opportunità.

Ho fatto disegnare e caratterizzare loro ogni quadrato come un albero , facendo loro comporre il BOSCO DEGLI ALBERI QUADRATI , e facendo evidenziare la base di ogni differente albero; dentro al tronco verrà indicato il numero totale delle unità-quadretto che compongono l'albero. In pochi giorni gli alunni memorizzano che l'albero quadrato di base 3 quadretti è grande 9 quadretti, che l'albero quadrato di base 5 è grande 25 quadretti, che l'albero quadrato di base 10 è grande cento quadretti; dopotutto sono solo dieci coppie di numeri da memorizzare dopo aver manipolato e disegnato (un decimo delle famigerate tabelline).

La rappresentazione aritmetica è meglio limitarla al numero corrispondente alla base con un quadratino sopra a destra del numero.

L'alunno quindi si esercita: per es. 5+ 3al quadrato = …..; 4 al quadrato –6=….. ecc. L'alunno acquisisce una idea pratica e geometrica dell'elevamento a potenza di un numero: tre al quadrato vuol dire un quadrato con base grande tre.



COMPONGO LA TABELLA

$1^{\square} = 1$
$2^{\square} = 4$
$3^{\square} = 9$
$4^{\square} = 16$
$5^{\square} = 25$
$6^{\square} = 36$
$7^{\square} = 49$
$8^{\square} = 64$
$9^{\square} = 81$
$10^{\square} = 100$
$0^{\square} = 0$

NUOVE OPERAZIONI

$3^{\square} + 2 =$
$5^{\square} - 4 =$
$2^{\square} + 3^{\square} =$
$4^{\square} + 10 =$
$6^{\square} - 1^{\square} =$
$5^{\square} + 0^{\square} =$
$7^{\square} - 3^{\square} =$
$8^{\square} + 5 =$
$9^{\square} - 3^{\square} =$
$10^{\square} + 3 =$
$1 + 9^{\square} =$

L'ALUNNO FISSA L'ATTENZIONE SULLA BASE E SUL SUO QUADRATO CORRISPONDENTE

… E RADICI

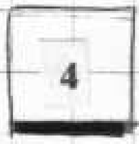
Successivamente, a concetto consolidato, si possono presentare **le radici**: sono semplicemente le radici di quegli alberi quadrati già precedentemente memorizzati; la domanda agli alunni diventa: "**un albero quadrato grande 9 su che radice si appoggia?**", "un albero quadrato grande 16 su che radice si appoggia?" ecc. Nel ridisegnare gli alberi quadrati , l'alunno va ad evidenziare la radice che altro non è che la base (meglio superiore) con una V iniziale; si chiama radice quadrata perché è la radice di un (albero) quadrato… $\surd$.

Per la rappresentazione grafica, poiché l'albero quadrato va contenuto dentro la radice, e quindi graficamente le radici scendono dall'alto, dalla base superiore del quadrato, potremmo parlare di alberi "mangrovia" le cui radici scendono dall'alto verso il basso…
L'alunno pian piano interiorizza la radice come inverso della potenza e anche in questo caso se ne fa una rappresentazione mentale grafico - geometrica.
Nel multibase le basi dei quadrati sono chiamate "lunghi" ma chiamarle radici offre più opportunità.

Aumenta così ulteriormente la quantità e la diversità delle operazioni su cui l'alunno può esercitarsi.
Quando si fanno svolgere esercitazioni numeriche agli alunni, si può inserire qualche operazione con potenza e/o con radice.

Chi possiede il materiale multibase completo con i cubi, potrebbe avventurarsi nel presentare anche **l'elevamento al cubo** dei numeri; gli alunni non presentano particolare difficoltà a comprendere il concetto di cubo di un numero: la base 3 ha un cubo che si chiama ventisettina, la base 4 ha un cubo chiamato sessantaquattrina, la base 5 forma un cubo di 125 unità, la base 10 naturalmente ha un cubo composto da 1000 unità….. Avremmo così un altro bosco, il bosco degli alberi cubici che stanno appoggiati sugli spigoli…
L'alunno, manipolando il materiale, comprende rapidamente che il cubo di 3 è grande 27, e così via……….(a quel punto anche la **radice –cubica**-, lo spigolo, di un cubo grande 27 è semplicemente 3)

– LE RADICI DEGLI ALBERI QUADRATI –

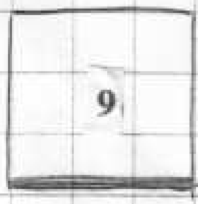


QUANTO È LUNGA LA {BASE O RADICE} DI UN ALBERO QUADRATO GRANDE 4?
SU CHE RADICE SI APPOGGIA?

$\sqrt{}$

LA RADICE DI UN ALBERO GRANDE...
(LA BASE DI UN QUADRATO GRANDE...)

$\sqrt{4} = 2$



$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

COMPONGO LA TABELLA

$\sqrt{1} = 1$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{0} = 0$

NUOVE OPERAZIONI

$\sqrt{4} + 2 =$
$\sqrt{9} - 1 =$
$\sqrt{16} + 2^{\square} =$
$\sqrt{25} + \sqrt{9} =$
$\sqrt{49} - \sqrt{0} =$
$\sqrt{36} + 3^{\square} =$
$\sqrt{64} + 5 =$
$\sqrt{100} - 10 =$
$\sqrt{81} - 2^{\square} =$
$\sqrt{100} + 4^{\square} =$
$\sqrt{1} + \sqrt{64} =$

ESERCITAZIONE

QUADRATI E RADICI

$3^{\square}+5=$	$4^{\square}+\sqrt{9}=$	$6^{\square}+6=$
$5^{\square}-4=$	$\sqrt{16}+7=$	$7^{\square}+9=$
$8^{\square}+0^{\square}=$	$\sqrt{25}-4=$	$4+5^{\square}=$
$6^{\square}+2^{\square}=$	$\sqrt{100}+\sqrt{9}=$	$10^{\square}-5=$
$8^{\square}-5=$	$\sqrt{1}\ldots+10=$	$\sqrt{25}+5=$
$\sqrt{36}-4=$	$\sqrt{100}+2^{\square}=$	$\sqrt{9}+\sqrt{4}=$
$5^{\square}+3=$	$4^{\square}+7=$	$20-3^{\square}=$
$7^{\square}-2^{\square}=$	$10^{\square}-\sqrt{4}=$	$5-\sqrt{16}=$
$\sqrt{20+5}=$	$\sqrt{20-4}=$	$\sqrt{\infty}+\infty^{\square}=$

INFINITO E ZERO

Agli alunni si può presentare il numero INFINITO che contiene un valore concettuale nuovo rispetto agli altri numeri; lo presento come l'equivalente di un buco nero in astronomia, cioè un numero che ingoia ed assorbe tutti gli altri, ed ogni tanto lo presento in mezzo a qualche operazione.
Agli alunni piace molto: 7+ infinito = infinito; infinito – 7000 = infinito ; infinito – 1 miliardo = infinito ; 5 x infinito = infinito ma 0 per infinito = 0 ; infinito : 5= infinito ; ma 10 : infinito = ragioniamo con gli alunni…….; la radice di infinito o il quadrato di infinito fa infinito

La rappresentazione grafica di infinito è come un otto sdraiato: ∞

Anche lo ZERO può servire per far ragionare gli alunni, per esempio il quadrato di zero, la radice di zero, lo zero che nella moltiplicazione vince sempre ma che nella divisione , se 8 : 0 =….., rende la divisione impossibile perché la prova non può dare il numero di partenza iniziale….

NUMERI SOTTOZERO (negativi)

Approfittando dell'inverno e delle basse temperature, si possono presentare agli alunni i numeri "sottozero". Un modo di presentarli è far loro vivere il debito: hai due caramelle, scommetti con me tre caramelle ? L'alunno deve perdere e va in debito di uno con l'insegnante; dopo una serie di esercizi simili (hai 3, perdi 5 ecc.) l'alunno acquisisce il concetto di numero negativo. Non ho mai riscontrato particolari difficoltà degli alunni ad acquisirne il concetto. Dopodiché si può passare alla loro rappresentazione sulla linea dei numeri; limitandosi a scendere a 10-15 sottozero; a questo punto l'alunno è in grado di operare in riga avendo la linea dei numeri davanti:

$+3 -5 =$ …. ; $+1- 4=$ … ; $-1-3=$ … ; ma $5-\infty =$..

DALL'OPERATORE MANCANTE ALL'ALGEBRA : I NUMERI "SEGRETI" (equazioni)

Alla fine della prima elementare gli alunni più capaci sono in grado di individuare l'operatore mancante che in genere viene proposto sotto forma di puntini: ….+ 5 = 8.
Proporre inizialmente, in sostituzione dei puntini, un cappuccio con piedi che rappresenta il numero mascherato o segreto, quindi invitare gli alunni a scoprire che numero si nasconde sotto il cappuccio.
Consiglio di operare con numeri bassi, inferiori al 20 e meglio ancora entro il 10 perché in questo caso è più importante l'acquisizione dei concetti più che l'abilità di calcolo. L'alunno acquista confidenza col numero segreto e lo inizia a manipolare alla stregua di un numero concreto qualsiasi.
Successivamente ci si accorda su dei nomi comuni per i numeri incappucciati, mister X, mister Y, mister Z ecc., abbreviati in x, y, z e quindi si può procedere a togliere il cappuccio ai numeri nascosti.
A questo punto l'alunno può svolgere operazioni del tipo $x + 3 = 7$ x=… ; $x - 2 = 5$ x= … ; $5 + y = 6$ y=…. In fase consolidata, suggerisco di usare spesso il valore nullo (0) dell'incognita ($y + 4 = 4$) e proporre qualche volta equazioni al momento impossibili (se non vengono presentati i numeri negativi) tipo $2+x = 0$
Si può **cominciare ad incuriosire** gli alunni spiegando che ci sono delle leggi segrete per risolvere queste operazioni, CERCHIAMOLE E PROVIAMOLE INSIEME: per esempio in $x + 5 = 8$, quando il numero +5 attraversa il fiume dell' = , cambia di segno e diventa –5, quindi ecco che $x = 8 - 5$ ci dà il numero nascosto. E' VERO? Ancora $y – 4 = 7$ il numero – 4 cambia di segno ed abbiamo così $y = 7 + 4$; quando si **trasporta** un numero oltre il fiume =, il numero cambia di segno, e questo vale anche per moltiplicazioni e divisioni. L'alunno a questo punto può provare e sperimentare il trasporto dei numeri e l'affermazione delle identità.Unica attenzione a non isolare numeri negativi (è prematuro…), e a chiarire che se un numero iniziale non ha segno, è sottointeso il segno +.
E' anche preferibile abituare gli alunni a tenere l'incognita sulla sinistra dell'equazione.

Per l'alunno - **ricorda:**

- QUANDO **TRASPORTI** UN NUMERO OLTRE IL SEGNO "=", IL NUMERO CAMBIA DI SEGNO : IL SEGNO + DIVENTA – , IL SEGNO – DIVENTA +

, LA MOLTIPLICAZIONE DIVENTA DIVISIONE, LA DIVISIONE DIVENTA MOLTIPLICAZIONE.

- CONTROLLA CHE LA QUANTITA' ESPRESSA PRIMA DEL SEGNO "=" CORRISPONDA ALLA QUANTITA' ESPRESSA DOPO IL SEGNO "=".
E' VERO CHE.....

- LASCIA DA SOLO IL NUMERO SEGRETO DA UNA PARTE DEL SEGNO "="

- SE DAVANTI AD UN NUMERO NON C'E' ALCUN SEGNO, SI INTENDE CHE C'E' IL SEGNO "+"

ALGEBRA = TRASPORTO
PRELIMINARI: MI ESERCITO A TRASPORTARE I NUMERI

- Esprimo (espressione) una quantità :es. 8

- Poi dichiaro che questa quantità è uguale/equivalente ad un' altra quantità:

es. 8=8

- Ora gioco a manipolare,scomporre, ricomporre e trasportare i numeri attraverso il segno "="

8 = 8

Scompongo il primo 8 in 5+3. Quindi ora scrivo 5+3=8 ; trasporto il 3 oltre il fiume (il segno "="), come deve cambiare il 3 affinché la prima affermazione (espressione) sia uguale all'altra (cioè, la parte a sinistra dell' "=" sia uguale/equivalente alla parte a destra dell' "=") ?

Provo e scopro che, per avere 5=5, il +3 deve cambiare di segno e diventare –3.

5 = 8 - 3 è vero? Si, 5 = 5.

10-2=8 trasporto il –2 che diventa +2 ed ora ho

10=8+2 è vero? Si

Ho scoperto la regola del cambio di segno nel trasporto di numeri attraverso il segno uguale, in entrambe le direzioni:

7 = 9-2 trasporto il -2 che diventa +2 ; ho così 7+2 = 9   E' vero?   Si

Provo anche con la moltiplicazione e divisione e scopro che, affinché l'affermazione di identità sia vera, nel trasporto la moltiplicazione deve diventare divisione e viceversa.

5 per 2 = 10   trasporto il "per 2" che diventa ":2" ed ora ho   5= 10:2 è vero? Si   (posso anche trasportare il "5 per" che diventa ":5" ed avrò 2=10:5)

8 : 2 = 4 trasporto il ":2" che diventa "per 2" ed ora ho 8=4 per 2.   E' vero? Si (posso anche trasportare "8:" ed avrò 2=8:4).

Dopo queste esercitazioni di trasporto "algebrico", posso passare alle equazioni vere e proprie.

SCOPRI QUANTO VALE IL NUMERO SEGRETO

Addizione con un numero segreto

X+4=9
X=

X+5=8
X=

Sottrazione con un numero segreto

X-2=5
X=

X-1=9
X=

Altri numeri segreti

Y+4=13
Y=

Y-5=10
Y=

Z+3=8
Z=

Z-0=4
Z=

5+X=8
X=

4+X=7
X=

Numeri segreti con segno negativo

6-X=2
6=2+X 6-2=X =X

Numeri segreti ripetuti

X+X=8
X=

X+X+X=15
X=

Y+Y+Y=9
Y=

Numeri segreti con più addendi o sottraendi

X+4+5=10
X=

X+4-1=10
X=

X-3-2=0
X=

X+3+5=∞
X=

Moltiplicazione con un numero segreto

X per 2=10
X=

3 per X=12
X=

Divisione con un numero segreto

X : 2=5
X=

8 : X=2
X=

Addizioni e sottrazioni con più numeri segreti, di cui uno o più dati

X=5+Y Y=3
X=

Y+4+X=10

Y=1
X=

X+5+Y=10 X=1
Y=

X+Y+Z=10 X=1 Y=3
Z=

Moltiplicazione e divisione con più numeri segreti, di cui uno dato

X per y=12 Y=3
X=

X : Y=5 Y=2
X=

Quadrati e radici con numeri segreti

X al quadrato=9
X=

X al quadrato + 1=10
X=

$\sqrt{x}$= 5	x=……

ESERCITAZIONE

ALGEBRA = TRASPORTO

$\begin{cases} x+3=11 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x-5=11 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x-3=8 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x+3^{\square}=11 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x+\sqrt{4}=7 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} 7^{\square}+x=51 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x-10=11 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x\cdot 4=20 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x:2=10 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x:3=10 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} 10:x=2 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} 20:x=4 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x+7=13 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x+6=25 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x+\sqrt{9}=8 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x+4^{\square}=17 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x^{\square}=25 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} \sqrt{x}=6 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x-4=14 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x-10=10 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} x-3=9 \\ x= \end{cases}$
$\begin{cases} x:2=6 \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} 5+x=\infty \\ x= \end{cases}$	$\begin{cases} 3\cdot x=\infty \\ x= \end{cases}$

Problemini con uso dell'incognita

- Se fossimo **Tanti** + 5 saremmo in 14; quanti siamo?

Trasformo il testo in termini matematici:

x+5=14

risolvo

x=14-5 x=9 Sostituisco nel testo e verifico

- Se fossimo **Tanti** + due volte Tanti saremmo in 21. Quanti siamo?

X + 2 per x = 21

3per x = 21 x=7 . Sostituisco nel testo e verifico

- Se fossimo **Tanti** + due volte tanti + 5 saremmo in 17. Quanti siamo?

X+2 per x + 5=17

3per x+5=17

3 per x=17-5

3 per x= 12

x=12:3

x=4 Sostituisco nel testo e verifico

- Problemini con l'incognita nelle figure geometriche, es.

Un triangolo isoscele ha il perimetro di cm20 e il lato obliquo di cm 6. Quanto è lunga la base?

X+6per2=20

X+12=20

X=20-12 x=8 Sostituisco nella figura e verifico

OPERARE CON PIU' NUMERI SEGRETI: sistemi di equazioni

Introduzione di due numeri segreti in contemporanea; scoprirne uno per individuare l'altro; comprensione del concetto di relazione e di interdipendenza, di soluzione per gradi, della possibilità di esistenza di più incognite diverse. Sottoporre sistemi di equazioni di primo grado del tipo:
X – 5 = 3 e
Y = x + 1
invitando l'alunno a scoprire il numero segreto x e y.
L'alunno prima deve scoprire il valore di x nella prima equazione e poi sostituirlo nella seconda.

SISTEMI DI EQUAZIONI

X+Y=3
X-Y=1

Isolo una x ed ho

X+y=3
X=1+y

Ora sostituisco nella prima equazione il valore di x

1+y+y=3
2perY=3-1
Y=2 :2
Y=1

Sostituisco il valore di y nella equazione iniziale che diventa

X+1=3
X=3-1 X=2

Ho così trovato il valore sia di x (2) sia di y (1)

Più interessante come applicazione l'introduzione del concetto di interdipendenza del tipo **SE……** **ALLORA…..:**
si può procedere proponendo una sola equazione con due incognite, assegnando noi a parte il valore ad una di esse: $x + y = 6$ se $x = 2$ allora y vale ……; se $x = 5$ allora y vale … .

Successivamente, per prepararli alla rappresentazione grafica delle equazioni, è meglio proporre le equazioni di primo grado con y già isolata sulla sinistra ; es. $y = x + 4$.

A questo punto gli alunni possono compilare la tabella del SE x… ALLORA y…, con i valori predefiniti di x da 0 a 10 (colonna del SE) a cui l'alunno deve fare corrispondere i valori assunti da y (colonna di ALLORA). Una serie di esercitazioni abituano l'alunno a compilare le tabelle.

EQUAZIONE

Y = x + 4

Se X	**Allora Y**
X=0	Y=4
X=1	Y=5
X=2	Y=6
X=3	Y=7
X=4	Y=8
X=5	Y=9
X=6	Y=10
X=7	Y=11
X=8	Y=12
X=9	Y=13
X=10	Y=14

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE EQUAZIONI

Quando la gran parte degli alunni ha imparato a comporre le tabelle "Se …. Allora…", si può passare alla rappresentazione delle equazioni sul piano cartesiano. I bambini scoprono che, come per magia, una equazione nasconde dei disegni e che coi numeri si può anche disegnare…..

Prerequisito è la conoscenza degli assi cartesiani e la capacita di operare su di essi. Si può ricorrere agli inizi a fotocopie degli assi cartesiani già numerati, meglio se si opera su quadretti grandi da 1 cm; avere l'avvertenza di trascrivere i numeri degli assi sulle righe e non dentro i quadretti altrimenti l'alunno si disorienta. La linea delle ascisse, orizzontale o mare o prato, viene chiamata ora la linea dei numeri segreti X; la linea delle ordinate, verticale o albero, viene chiamata ora la linea dei numeri segreti Y.

Data una equazione, l'alunno può disegnarla dopo averne compilato la tabella di Se… Allora… e congiungendo i punti disegnerà una retta. Successive espansioni possono portare a disegnare due rette e a individuare il punto di incontro. Una volta consolidata questa abilità, è possibile procedere in maniera inversa: per es. dedotte dal grafico le co-ordinate del punto di incontro di due rette, andarle a verificare nelle equazioni, sostituendo i valori delle coordinate alle incognite x e y.

Per chi presenterà anche le potenze e le radici, potrà far rappresentare sugli assi cartesiani anche le equazioni di secondo grado (parabole)

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

A questo punto, padroneggiando la capacità di elevare al quadrato i numeri, all'alunno può essere riproposto di rappresentare graficamente una equazione di secondo grado sugli assi cartesiani:

es. Y= X al quadrato (oppure Y=X al quadrato + 3 ecc..)

L' alunno compone la tabella avendo ben evidenziato l'equazione **Y=X**

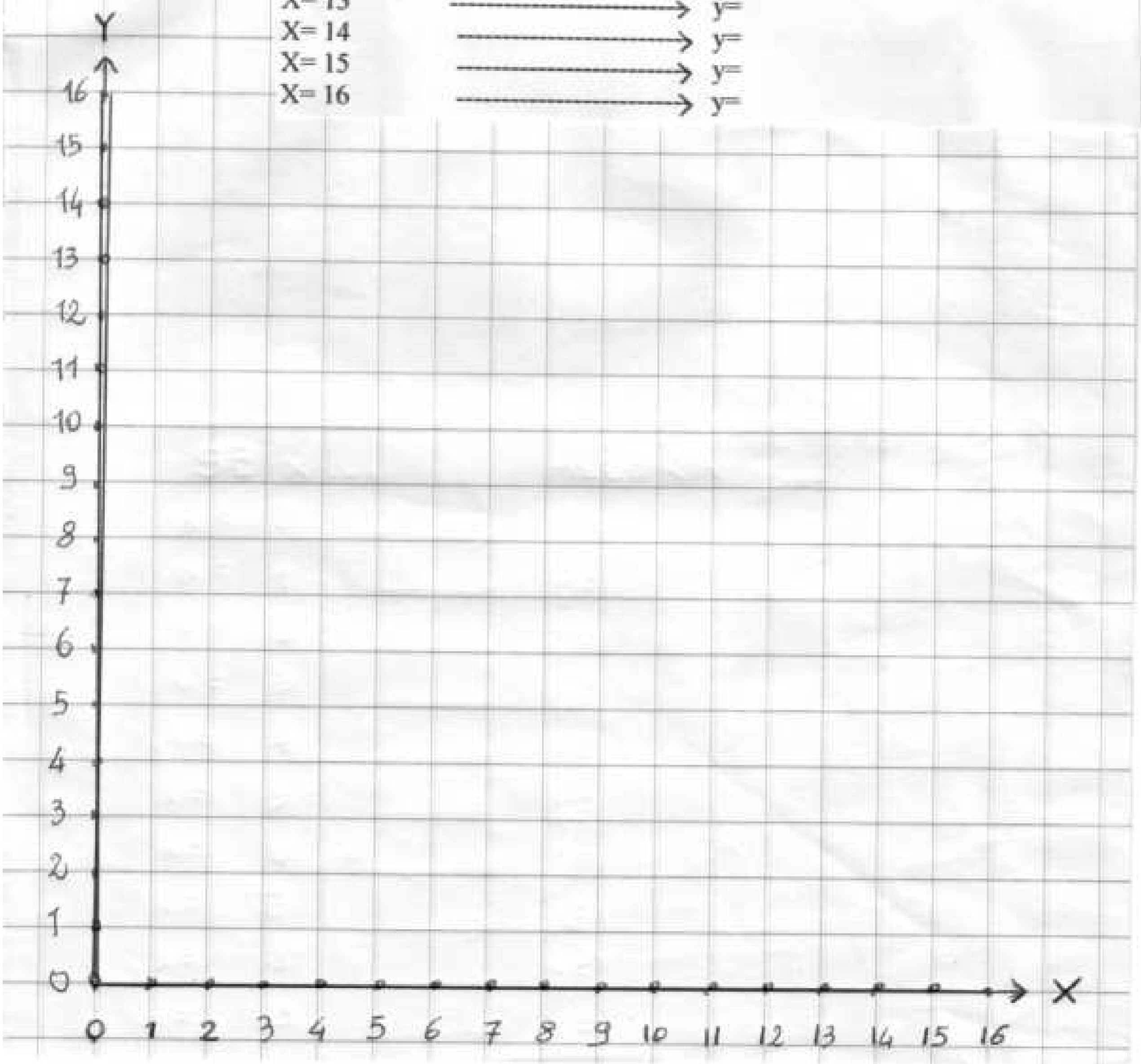
"SE ….	ALLORA….."
X=0	Y=0
X=1	Y=1
X= 2	Y=4
X=3	Y=9
X=4	Y=16

E poi ne fa la rappresentazione grafica; sullo stesso foglio è possibile procedere a più rappresentazioni grafiche.

DISEGNO SUGLI ASSI CARTESIANI ....

SE x ....   **ALLORA y ....**

X= 0 ⟶ y=
X= 1 ⟶ y=
X= 2 ⟶ y=
X= 3 ⟶ y=
X= 4 ⟶ y=
X= 5 ⟶ y=
X= 6 ⟶ y=
X= 7 ⟶ y=
X= 8 ⟶ y=
X= 9 ⟶ y=
X= 10 ⟶ y=
X= 11 ⟶ y=
X= 12 ⟶ y=
X= 13 ⟶ y=
X= 14 ⟶ y=
X= 15 ⟶ y=
X= 16 ⟶ y=

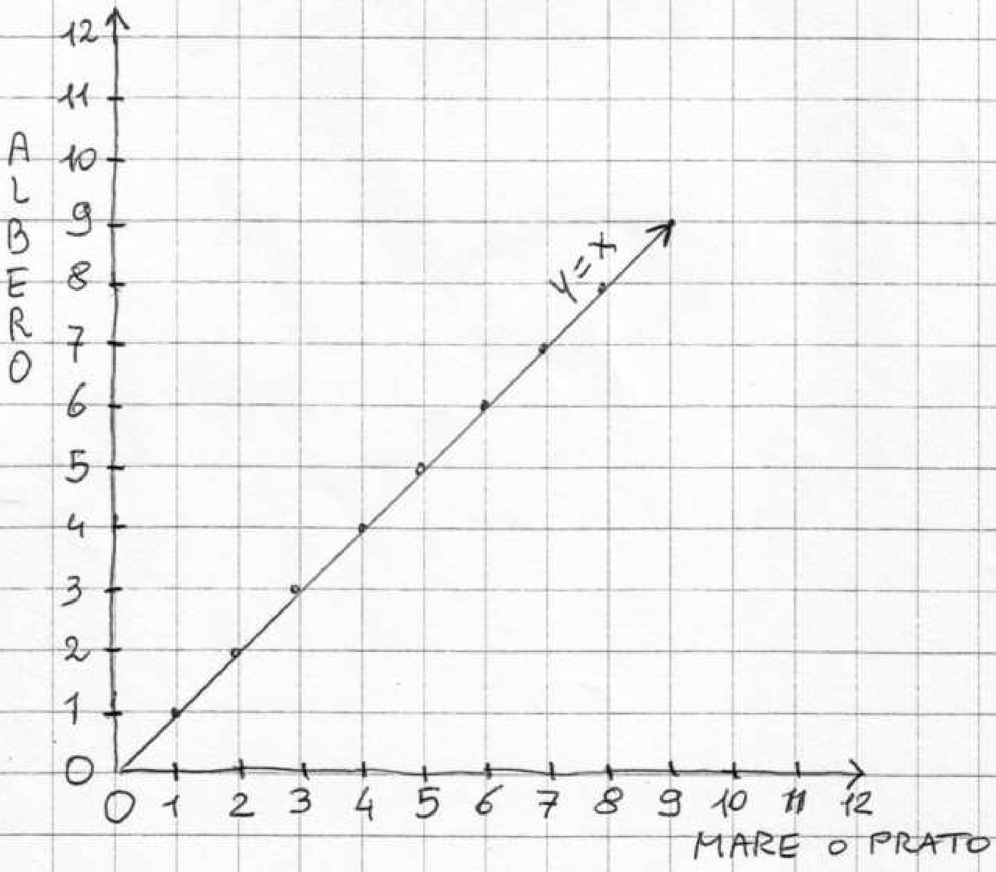


RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE EQUAZIONI

- DISEGNARE I NUMERI SEGRETI SUGLI ASSI CARTESIANI -

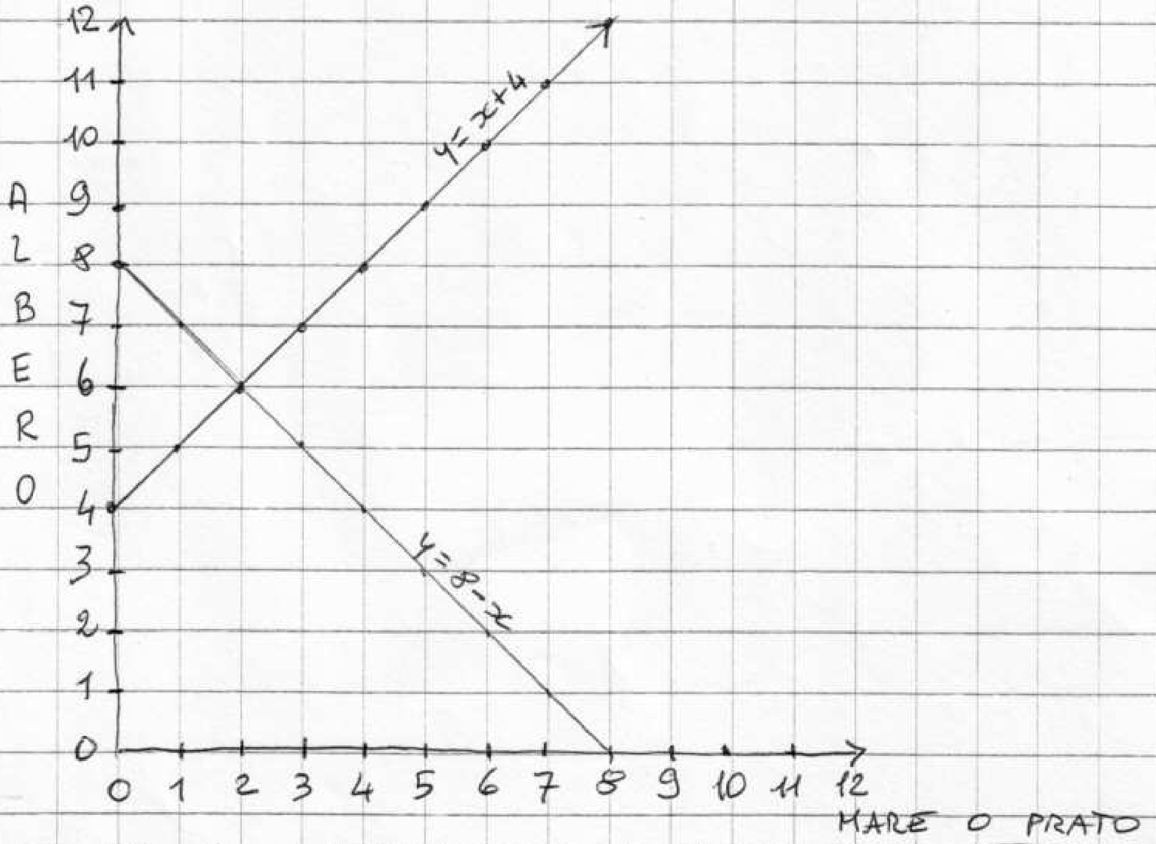
$$\boxed{Y = X}$$

SE	ALLORA ...
$x = 0$	$y = 0$
$x = 1$	$y = 1$
$x = 2$	$y = 2$
$x = 3$	$y = 3$
$x = 4$	$y = 4$
$x = 5$	$y = 5$
$x = 6$	$y = 6$
$x = 7$	$y = 7$
$x = 8$	$y = 8$
$x = 9$	$y = 9$
$x = 10$	$y = 10$



$Y = X + 4$

SE...	ALLORA...
$x=0$	$y=4$
$x=1$	$y=5$
$x=2$	$y=6$
$x=3$	$y=7$
$x=4$	$y=8$
$x=5$	$y=9$
$x=6$	$y=10$
$x=7$	$y=11$
$x=8$	$y=12$
$x=9$	$y=13$
$x=10$	$y=14$



E SE SI AGGIUNGESSE IL DISEGNO DI $\boxed{y=8-x}$

SE...	ALLORA
$x=0$	$y=8$
$x=1$	$y=7$
$x=2$	$y=6$
$x=3$	$y=5$
$x=4$	$y=4$
$x=5$	$y=3$
$x=6$	$y=2$
$x=7$	$y=1$
$x=8$	$y=0$

BASE 16 E MULTIBASE

Il calcolo multibase, molto diffuso a scuola fino ad una dozzina di anni fa tanto da essere al centro della programmazione didattica nel primo ciclo, è ora presente in forma ridotta su diversi libri di testo. Esso mira a sviluppare un pensiero con molteplici capacità di strutturare i dati e si pone in alternativa o in complemento al calcolo in base 10. Esso infatti propone di operare, fare riporti o prestiti non solo sui raggruppamenti fissi di 10 quantità come avviene appunto in base 10, ma anche raggruppando per 3, per 4, per 5 ecc.. Se proposto nelle classi ex-primo ciclo, è indispensabile utilizzare il materiale strutturato multibase affinché gli alunni possano manipolare a lungo unità, lunghi (o radici), quadrati, cubi. La base tre è la base chiave per l'insegnamento del multibase; abbiamo così l'occasione che è relativo dire 2+2=4, dipende dalla base con cui si sta operando. In base tre 2 + 2 fa 11…)
Le basi 4 e 5 , e successive, risultano molto utili per consolidare il calcolo multibase; la base 2 invece a mio parere è molto/troppo difficile. Il multibase è un ottimo sistema per sviluppare le capacità di strutturare e destrutturare le quantità numeriche.
Con gli alunni ho provato a sperimentare la base 16, base che richiede una numerazione in parte letteraria. Il concetto è che devo eseguire operazioni di cambio quando arrivo non a 10 ma a 16. Poiché in una colonna può stare solo una cifra, occorre che il numero 10 equivalga ad A, 11 a B, 12 a C, 13 a D, 14 a E, 15 a F, a sedici si cambia; per cui 5+5 = A, 8+7 =F, 9+9 =12 (perché quando arrivo a sedici effettuo il cambio con una sedicina e la porto nella colonna successiva, restandomi così 2 unità da registrare nella colonna in cui stavo operando).
Utilizzando inizialmente una tabella con i codici letterari rappresentativi dei numeri da 10 a 15 l'alunno può eseguire addizioni e sottrazioni ed oltre senza particolari difficoltà; è comunque consigliata per le classi alte della scuola primaria. Le operazioni, una volta presa familiarità con i codici letterari, possono essere svolte in colonna.

MULTIBASE

ADDIZIONI IN BASI DIVERSE

BASE 3 USO SOLO 0-1-2. A 3 RAGGRUPPO	0202+ 1201=	0102+ 0211=	1202+ 0202=	1111+ 0202=
BASE 4 0-1-2-3 USO SOLO	0103+ 1301=	0202+ 1202=	1303+ 0302=	0303+ 1313=
BASE 5 0-1-2-3-4 USO SOLO	0204+ 1201=	0304+ 0312=	0404+ 0413=	1234+ 0401=
BASE 10 0-1-2-3-4-5 6-7-8-9	1505+ 0705=	1809+ 0413=	2738+ 0502=	1906+ 0436=
BASE 16 A=10 B=11 C=12 D=13 E=14 F=15	3A0A+ 02B1=	3B1C+ A5E2=	AAAA+ 5436=	AB0D+ 4523=

000A+ 0003=	000B- 0001=	000C- 0001=	000C- 0002=	000F- 0003=	000D- 000A=
1BAB+ AABA=	ABAB+ 0BAB=	A0B0- 0101=	A0B0- 0202=	ABCD· 2=	ABCD· 21=

BASE 3 → A 3 CAMBIO → PRENDO IN PRESTITO UN GRUPPO DI 3

0202+	1202+	0222+	2121−	2020−	2100−
0201=	0112=	0211=	0212=	0102=	0002=

BASE 16 A=10 B=11 C=12 D=13 E=14 F=15 (A 16 CAMBIO)

ABAB+	ACAD+	AEAF+	B1C1−	D2E2−	A3F3−
1526=	2525=	1314=	1A1A=	1A1A=	1A1A=

BASE 4

1313+	3121−
0201=	1213=

BASE 5

1414+	4131−
0201=	1213=

BASE 6

1515+	5141−
0201=	1213=

BASE 10

1515+	1617+	1255+	2120−	3333−	5511−
1515=	2526=	1255=	1515=	1514=	1155=

BASE 10

3715+	2627+	1555+	6152−	7284−	2000−
1628=	1985=	555=	1625=	1915=	153=

BASE 3 (A 3 CAMBIO): "MI PRESTANO UN GRUPPO DI TRE"

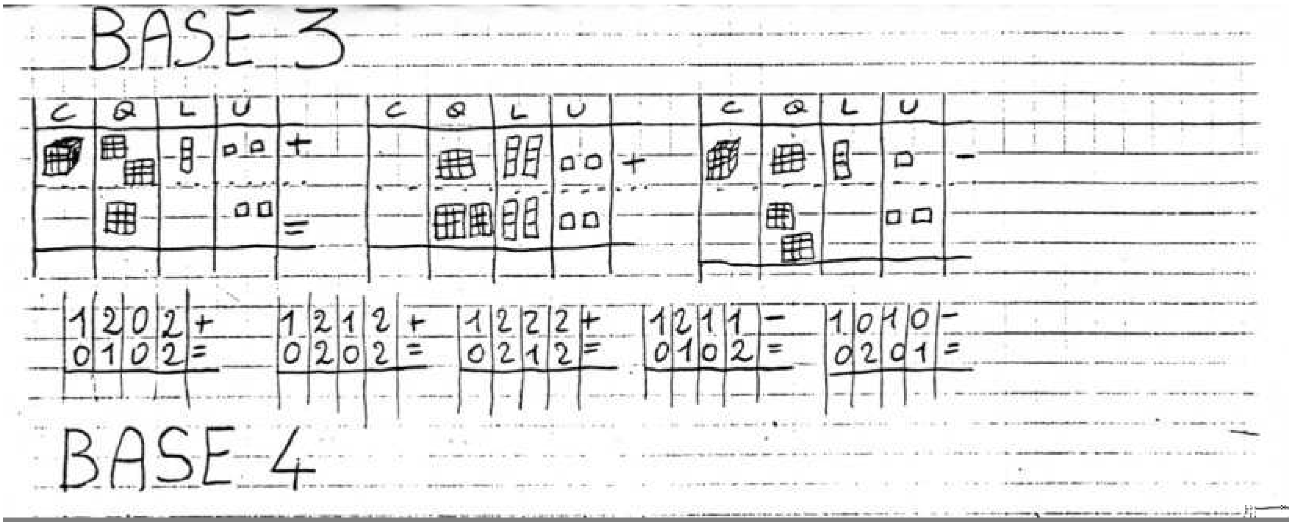
1212+	0202+	0202+	2120−	2121−	2121−
0202=	0102=	0212=	0201=	0202=	1212=

BASE 16 A=10 B=11 C=12 D=13 E=14 F=15 (A 16 CAMBIO)

1A1A+	1B1C+	2D2E+	1F1E+	ABCD−	1111−
A716=	A5B4=	B5A3=	B3C4=	3333=	ØAØB=

ALTRE BASI

BASE 4	BASE 5	BASE 6	BASE 7	BASE 8	BASE 9	BASE 10
1312+	1314+	1415+	1516+	1517+	2728+	1515+
1212=	12Ø2=	1321=	1312=	1513=	1311=	1615=


BASE 3
C Q L U
+
=
C Q L U
+
C Q L U
−
1 2 0 2 +
0 1 0 2 =
1 2 1 2 +
0 2 0 2 =
1 2 2 2 +
0 2 1 2 =
1 2 1 1 −
0 1 0 2 =
1 0 1 0 −
0 2 0 1 =
BASE 4

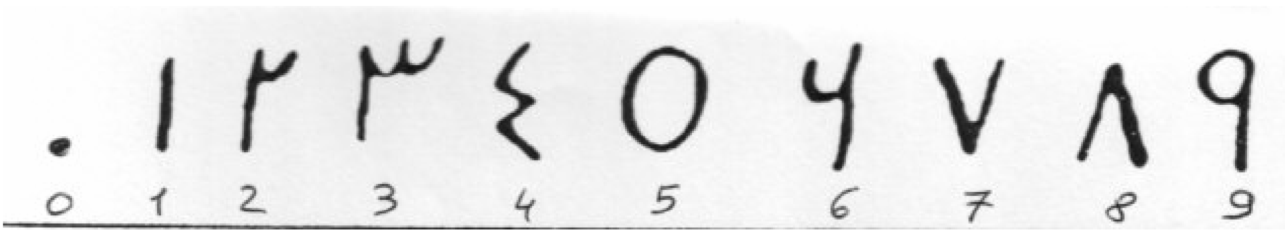
OPERARE CON CODICI NUMERICI DIVERSI

Un tipo di esercitazione che ha sempre successo tra gli alunni è lo svolgimento di operazioni utilizzando numeri di altre culture che richiedono una diversa scrittura. Motivati dalla curiosità e dall'imparare cose che i propri genitori o amici non sanno fare, apprendono più rapidamente di quanto si pensi. Attualmente diventa anche una forma di accoglienza per gli alunni stranieri.

Le cifre più utilizzate sono quelle "arabe" e cinesi, ma ci sono anche i numeri dell'antico Egitto o di qualsiasi altra cultura. Inserire ogni tanto qualche operazione o numerazione con codici diversi piace e stimola una maggior elasticità mentale e capacità di codificazione/decodificazione. Un altro modo di presentarli , volendo anche quotidianamente, è nel trascrivere la data del giorno.

Il libro "Nel mondo dei numeri e delle operazioni" – vol.4, ed.Erickson, ne fa una completa e straordinaria elaborazione.

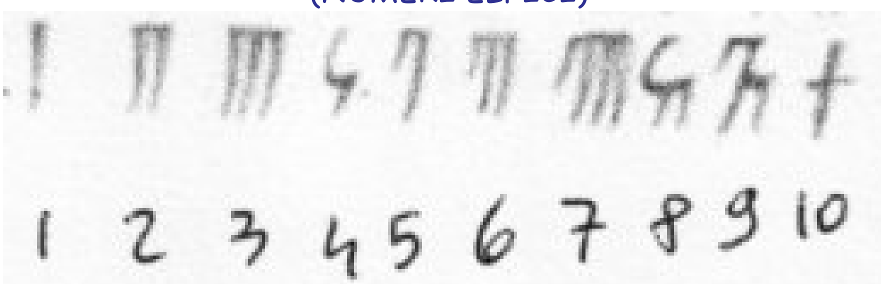
NUMERI ARABI



NUMERI CINESI

NUMERI A PIACERE

(NUMERI ELFICI)



SEQUENZE

Successioni di forme o di numeri vengono presentate agli alunni per invitarli a scoprire la legge, la regola, il ritmo della successione. E' una buona pratica per far riflettere gli alunni sui numeri e sulla **capacità di individuare le relazioni e le trasformazioni** in corso in una successione. In genere suggerisco agli scolari di segnare sopra, tra un numero e l'altro, la differenza tra due numeri della successione (l'entità della trasformazione) e poi di osservarle e confrontarle tra loro. Vi sono sequenze complesse che richiedono invece altri metodi, come le famose sequenze di Fibonacci : 1-2-3-5-8-13-21 ……dove ogni numero della successione è la somma dei due precedenti; si può cominciare anche con 1-3……. Le sue sequenze sono famose per aver avuto riscontro in natura, nella disposizione delle squame delle pigne, nella buccia dell'ananas, nella disposizione dei semi del girasole.

GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Nella scuola la presentazione della geometria è svolta in maniera così unilaterale che alla fine dei percorsi di studio si identifica la geometria unicamente con la geometria piana.

Tenendo sempre l'attenzione sul proporre agli allievi una pluralità di punti di vista, di osservazione dei fenomeni, ho più volte affiancato alla tradizionale geometria piana frammentari elementi "destrutturanti" della stessa. Poiché su questo foglio "piano" non posso portare esempi visibili concreti, cercherò di esporre a parole.

Due rette parallele prolungate all'infinito non si incontrano mai: dopo aver esposto questo assioma, dimostro loro che questo vale solo su un piano "piano"; se pigliassi il foglio e lo ripiegassi su se stesso parzialmente inclinato, le due linee parallele si possono incrociare. Ciò per dimostrare che non c'è solo la geometria dello spazio piano.

Dati due punti è possibile tracciare una sola retta, ma se la superficie è per es. sferica da Roma a Milano posso andarci in modo rettilineo anche passando da polo nord e poi polo sud. Agli alunni, con un mappamondo o una palla in mano, non è difficile spiegarlo e farlo comprendere.

Idem riguardo **la somma degli angoli interni di un triangolo** che su una superficie piana è di 180 °, ma solo su una superficie piana; indicando agli allievi su un mappamondo la linea dell'equatore e due meridiani che vi cadono sopra in modo perpendicolare, abbiamo un triangolo (due punti sull'equatore e vertice sul polo) che già ha la somma degli angoli alla base di 180° più l'ampiezza dell'angolo al vertice. Non si rischia di generare confusione se si fa comprendere l'elemento determinante che è l'attenzione al piano su cui si opera e le sue caratteristiche.

APPUNTI SU STRUTTURARE/DESTRUTTURARE E DENTRO/FUORI

Alcune considerazioni: si rende necessario nell'insegnamento sviluppare le abilità di strutturare e destrutturate dati, informazioni, conoscenze, problemi Diciamo che **le abilità di strutturare e destrutturate e il porsi da un angolo di osservazione diverso (fuori/dentro…) sono pre-requisiti fondamentali per la formazione di un pensiero creativo.**

<u>Prima strutturare e poi destrutturate?</u> In genere la separazione netta dei due tempi non funziona perché in questo caso avremmo un pensiero troppo strutturato che faticherebbe a riorganizzare le proprie logiche interne: basta vedere le difficoltà che abbiamo noi adulti ad imparare il calcolo multibase. Basta vedere il nostro modo di ragionare da adulti, abbastanza subalterno a schemi consolidati e la facilità con cui invece giovani alunni acquisiscono schemi nuovi.

<u>Strutturare e destrutturate contemporaneamente</u>: concordo che questo metodo possa generare grande e magari irrimediabile confusione.
La mia limitata esperienza mi ha portato a questa strategia: presentare la destrutturazione appena dopo acquisita e sufficientemente consolidata la strutturazione, diciamo in una "quasi contemporaneità" o "<u>contemporaneità lievemente differita</u>". Spiego che 2 + 2 fa 4 ma poco dopo dimostro che invece in base 3 fa 11; spiego che due linee parallele non si incontrano mai ma poco dopo arrotolo il foglio e dimostro che su piani curvi le parallele si possono toccare; dimostro che tutti i sassi affondano nell'acqua ma il giorno dopo porto una pietra pomice che invece galleggia, per sollecitarci ad ampliare la teoria e le spiegazioni.

Nei momenti d'oro dell'uso del multibase nella scuola si procedeva così: nel corso del primo anno della scuola elementare venivano presentati i numeri non superiori al 10 proprio per non dare una forma mentis troppo strutturata sulla base 10, poi, nel corso del secondo anno, si procedeva con la presentazione delle altri basi.
Strutturato e destrutturato: nella scuola si possono mettere in atto numerosi percorsi didattici per sollecitare e stimolare queste capacità.

Tra i percorsi metterei in matematica il multibase, l'insiemistica, l'algebra e l'uso di codici;

in Lingua l'analisi logica, la composizione e scomposizione di una trama narrativa nei testi, con finali variabili e/o con ambientazioni differenziate (pensiamo ad un Cappuccetto Rosso ambientato al Polo, in Africa, o in epoche antiche; per non parlare poi del punto di vista del lupo..).

In Geografia la capacità di orientarsi su una carte planisferiche aventi al **centro** non solo l' Europa, ma anche l'Asia, o le Americhe, o l'emisfero sud o, meglio ancora, su un planisfero circolare con il polo nord al centro rappresenterebbe l'acquisizione di abilità strutturanti/destrutturati e la capacità di osservare da punti di vista diversi.

Dentro/fuori, altri angoli di osservazione: in Storia darei rilievo all'esposizione dei punti di vista delle parti avverse e rivaluterei l'importanza delle simulazioni di scenari storici: quanto soffocante è l'affermazione "la Storia non si fa con i SE".

Fare la storia con i SE quanto nutrimento sarebbe per l'immaginazione e quale palestra per la logica, purchè gli scenari siano rigorosi da un punto di vista logico; forse che ai vertici dei Centri strategici delle Società non si procede per simulazione di scenari possibili? E quale linfa per gli alunni dare spazio all'immaginazione purchè logicamente rigorosa? "L'immaginazione vale più della conoscenza" - A.Einstein.

Lo studio del poema epico di Gilgamesh potrebbe ridimensionare l'eccesso di valenza dato nella nostra cultura alla Bibbia

Se poi vogliamo cominciare a considerare tutte le discipline umanistiche dall'arte alla letteratura, ci possiamo immediatamente rendere conto come esse siano così circoscritte e limitate ad una auto-celebrazione occidentale, siano cioè confinate in un punto di vista occidentale-centrico. Porsi anche fuori da questo punto di vista e riosservare da altri punti di vista o dall'insieme più generale dell'intero genere umano aprirebbe una strada di esplorazione su cui lavorare a lungo.

Mi è successo di cercare sul web brani di letteratura delle filippine per la preparazione all'esame di un alunno filippino: digitando "letteratura universale" ti viene spacciata per il 90 % letteratura occidentale, cioè di meno di un quarto dell'umanità. Anche altre scienze soffrono dei limiti di impostazione euro/occidentale centrica e degli sforzi in corso per uscire da questi confini ed entrare in insiemi più grandi: mi viene in mente di aver assistito una volta in un pronto soccorso milanese ai dialogo tra un medico biondo occhi azzurri che proponeva ad un altro medico di colore di iscriversi insieme ad un corso di medicina ayurvedica indiana (e magari in precedenza avevano frequentato un corso di agopuntura cinese…).

Nelle scuole, a cominciare dalla scuola dell'obbligo, stanno maturando le condizioni e gli stimoli per porsi da più angolazioni, stimolati e sollecitati dalla presenza crescente di alunni provenienti da altre aree culturali.

Oltre a più o meno organici percorsi, ricerche e sperimentazioni didattico-culturali, la strutturazione/destrutturazione ed il dentro/fuori possono essere proposti con **piccoli accorgimenti** nella quotidianità scolastica. Alcuni esempi:

- ogni giorno indicare la data secondo diversi sistemi di datazione o con altri codici numerici (oggi 12 dicembre 2005 o 1426 per un oltre un miliardo di islamici, magari con cifre arabe)
- portare in fila gli alunni utilizzando le definizioni "in fila i non-maschi", "in fila le non-femmine"
- organizzare una tantum qualche festa di non-compleanno.

In attesa di vostro riscontro, di suggerimenti ed indicazioni, di critiche, auguro a tutti buona esplorazione.

LUIGI AMBROSI
(luigiambrosi@fastwebnet.it)
dicembre 2005