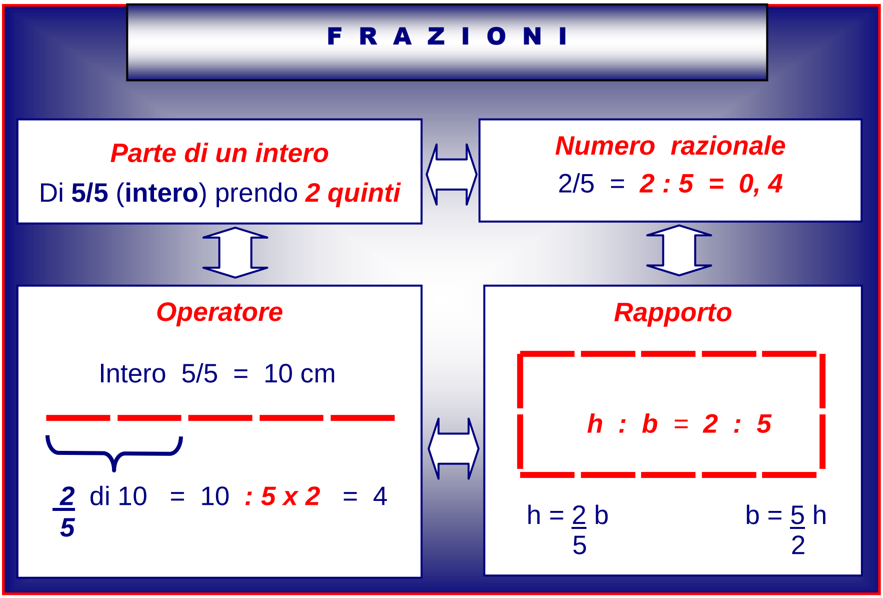
F R A Z I O N I

di Ennio Monachesi

SITO www.monachesi.it



Il **concetto** di frazione, come evidenziato nello schema logico, si articola in **4 aspetti** diversi, ma strettamente **interconnessi.**

1 -La frazione come **<u>parte di un intero</u>** è costituita da una o più **unità frazionarie uguali** in cui si suddivide l'intero stesso.
Ad es. dell'intero suddiviso in **5 quinti** uguali si prendono **2 quinti**.
Il denominatore è espresso con la parola "**quinti**" per evidenziare il suo diverso **significato** rispetto al numeratore e favorire così la **comprensione** concettuale che è alla base del ragionamento logico.

2 -La frazione è **un operatore**, che consente di calcolare il valore della frazione di una grandezza, **dividendo** il valore di tale grandezza per il **denominatore** e moltiplicando il **risultato per il numeratore,** nei problemi **diretti**; o viceversa, di calcolare il valore di una grandezza conoscendo il valore di una sua frazione, **dividendo** il valore di tale frazione per il **numeratore** e moltiplicando il risultato **per** il **denominatore,** nei problemi **inversi**. Ritengo tuttavia che, in base al diverso **significato** dei due termini della frazione, si possa ragionare anche con una logica di **proporzionalità diretta** tra **i soli numeratori** ed i valori delle rispettive frazioni.

(Vedi pagg. 16-21)

3 -La frazione può anche indicare **un rapporto**. Ad es. l'**altezza** di un rettangolo sta alla sua **base** come **2 sta a 5.** Cioè **h : b = 2 : 5.** Da cui **h = 2/5 b,** e cioè **l'altezza è 2 quinti** della **base.** Ma quest' ultima formulazione si basa sui **2 precedenti concetti** di frazione. Infatti, se l'**altezza è 2 quinti** della **base,** questa, cioè la **base,** è intesa come **l'intero 5/5,** e l'**altezza** come una sua frazione, cioè i suoi **2/5**. E' il primo concetto di frazione già visto. Inoltre **2/5** è anche **l'operatore** che, conoscendo l'intero, cioè la base, mi permette di calcolarne la frazione **2/5**, cioè l'altezza, con la **formula** già vista "*base **diviso denominatore** 5 **per numeratore** 2.*"
Se inverto il rapporto, ottengo **b = 5/2 h**, e cioè che la **base è 5/2** (frazione) dell'**altezza 2/2** (intero), calcolando la base con la stessa formula "*altezza **diviso denominatore** 2 **per numeratore** 5.*"
Ma su tale formula, come già detto, vedi **pagine 16-21.**

4 -La frazione infine può essere concepita come un **numero razionale**, derivante dal **quoziente** della divisione tra il numeratore e il denominatore. Ad es. **2/5 = 2 diviso 5 = 0,4**. Infatti **2** equivale a **20 decimi**, e 20 decimi **diviso 4** fanno **4 decimi**. In tale caso è facile anche visualizzare **l'equivalenza tra 2/5** di un segmento che corrispondono ai **4/10** dello stesso segmento. Tale concetto di frazione è forse il più difficile, e può essere compreso meglio se inizialmente si cerca di chiarirlo con esempi facili ed intuitivi.

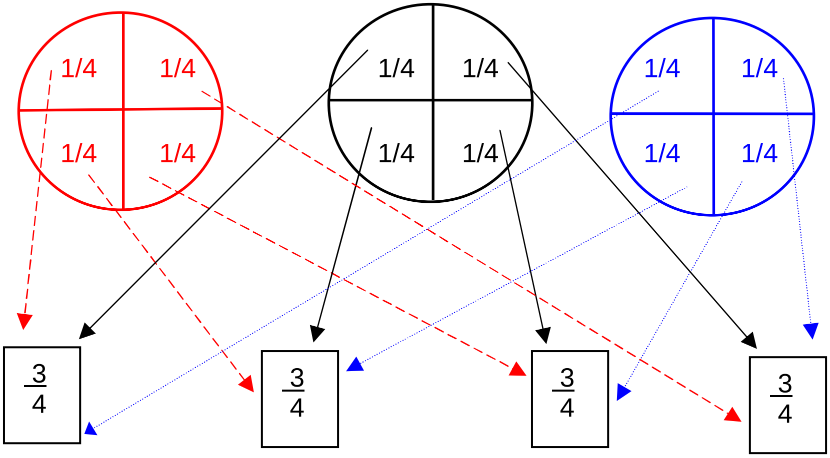
Quanto detto evidenzia sia la **diversità** dei 4 aspetti del concetto di frazione, sia la loro **stretta interconnessione**. Tali concetti si traducono in scritture simboliche, formule e algoritmi di calcolo, che si possono capire tanto meglio quanto più si sono capiti **i concetti e i significati**, senza i quali i simboli sono privi di significato e le formule e gli algoritmi sono appresi come automatismi ciechi. Quando ciò avviene si **atrofizza** la matematica, privandola della **linfa vitale** della **comprensione** dei concetti, che riempie di significato le scritture simboliche e fonda gli **algoritmi** "**sintattici**" di calcolo e **il ragionamento "strategico"** nella soluzione dei problemi, in modo anche originale. Ma il rigore assoluto degli algoritmi può richiedere di prescindere dal significato, che invece resta fondamentale per poter capire e ragionare. **René Thom**, medaglia Field '58, (il "nobel" della matematica) osserva: *"Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra **rigore e significato**, scelgo quest'ultimo senza esitare" (G. Ottaviani, "La teoria degli insiemi…", su internet).*
Nel libro di ***Keith Devlin**, "L'istinto matematico*", si costata come i **venditori** di noci di cocco e gli **acquirenti** del supermercato se la cavano benissimo con la "***matematica di strada***", "naturale" e piena di significato, con calcoli e problemi pratici e significativi, mentre falliscono con la "*matematica scolastica*", perché astratta.. **Devlin** osserva: *"Il problema che molte persone hanno con la **matematica scolastica** è che non sono mai arrivate a comprenderne il significato: rimane per sempre un **gioco astratto di simboli formali."*** E allora bisogna cercare di "***gettare un ponte***", come dice **H. Freudenthal**, tra la "**matematica naturale" intuitiva**, e quella "**scolastica", formale**, prendendo gradualmente dimestichezza con la seconda ed innestandola su di una base motivante e significativa. Per fare ciò è necessaria una **didattica laboratoriale**, e un approccio "***sostanziale-significativo***", per capire sempre meglio anche quello "***formale.***" *(Pellerey, "Progetto RICME", I, pagg. 14-20)* Tale criterio è tanto più importante quanto più le formule ed i simboli matematici sono **astratti**, come appunto quelli delle **frazioni,** che costituiscono uno dei concetti matematici **più importanti**, difficili e complessi, in cui è molto forte il **rischio** di **formalismo** astratto e mnemonico.

F R A Z I O N I

PROPRIE ***minori** di **1 intero***	**APPARENTI** **1** o **più interi**	**IMPROPRIE** apparenti + *proprie* ***maggiori** di **1 o più interi***
1 quarto		
2 quarti		
3 quarti		
	4 quarti = 1 intero	
		5 quarti = 4/4 + *1/4*
		6 quarti = 4/4 + *2/4*
		7 quarti = 4/4 + *3/4*
	8 quarti = 2 interi	
		9/4 = 4/4 + 4/4 + *1/4*
		10/4 = 4/4 + 4/4 + *2/4*
		11/4 = 4/4 + 4/4 + *3/4*
	12 quarti = 3 interi	
		13/4 = 3 interi + *1/4*
		14/4 = 3 interi + *2/4*
		15/4 = 3 interi + *3/4*
	16 quarti = 4 interi	
		17/4 = 4 interi + *1/4*
		18/4 = 4 interi + *2/4*
		19/4 = 4 interi + *3/4*
	20 quarti = 5 interi	
	continua all'infinito	*continua all'infinito*

Si possono riempire tabelle con la stessa struttura, ma con serie di **frazioni diverse**: ad es. 1/5 , 2/5, 3/5 ecc.; 1/8, 2/8, 3/8, ecc., per una piena comprensione delle 3 classi di frazioni, che sono anche rappresentabili sulla **retta dei numeri.**

FRAZIONE COME *NUMERO RAZIONALE*



3 : 4 = 12 quarti **:** 4 = 3 quarti = **0 , 7 5**

30 decimi **:** 4 = **7 decimi** *(resto 2 decimi*

cioè 20 centesimi)

20 centesimi : 4 = **5 centesimi**

2 : 5 = 10 quinti **:** 5 = 2 quinti

20 decimi **:** 5 = 4 decimi = **0,4**

3 : 5 = 15 quinti **:** 5 = 3 quinti

30 decimi **:** 5 = 6 decimi = **0,6**

3 : 6 = 18 sesti **:** 6 = 3 sesti

30 decimi **:** 6 = 5 decimi = **0,5**

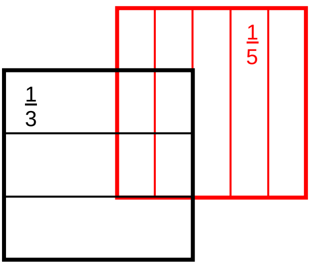
SET LUCIDO DELLE FRAZIONI

*Le **matrici** da stampare su **lucidi trasparenti** e ritagliare, e **l'animazione al computer**, anche del SET LINEARE, si trovano nel sito* ***www.monachesi.it***

Il *"set lucido delle frazioni"* si compone di **quadrati lucidi trasparenti**, delle stesse dimensioni, frazionati o in un solo senso o in entrambi i sensi, dai 2/2 fino ai 100/100, con linee di **colore diverso** per i denominatori **primi** di ***2/2*** *(azzurro),* ***3/3*** *(nero),* ***5/5*** *(rosso),* ***7/7*** *(violetto),* e rispettivi **multipli.** Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: il *violetto di 7* prevale sul *rosso di 5* che prevale sul *nero di 3* che prevale sull' *azzurro di 2.* *(Vedi avanti "Uso del colore")*

Prodotto di frazioni

Il prodotto di frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 quadrati del set raffiguranti le 2 frazioni da moltiplicare, frazionati, uno in senso verticale e l'altro in senso orizzontale. Esempio:



2/3 x (di) 2/5 = 4/15
2/5 x (di) 2/3 = 4/15

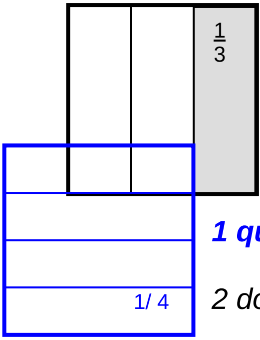
Se sovrappongo **3/3** su **5/5** visualizzo *3/3 x 5/5 = 15/15*

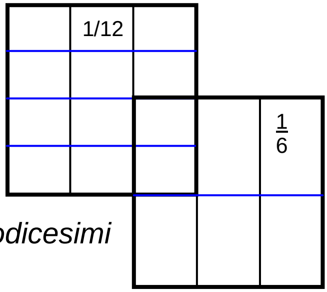
Problema *(Prova nazionale INVALSI 2008)*

Un padre e i suoi 4 figli si dividono una vincita al lotto in questo modo: al padre ne spetta 1/3, e il rimanente viene diviso in parti uguali tra i figli. Quale parte della somma spetta a ciascun figlio?

Soluzione

*Il padre prende **1 terzo** della vincita; ai 4 figli ne restano **2 terzi**.*





***1 quarto* di 2 terzi** *= 2 dodicesimi*

2 dodicesimi = 1 sesto

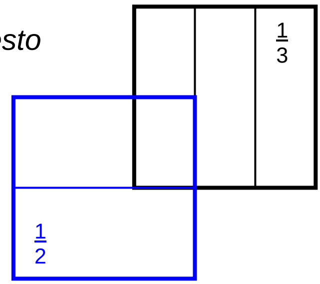
$$\frac{2}{3} : 4 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

*Poiché i figli sono 4, per trovare la parte che spetta a ciascuno di essi, si divide la parte rimasta, cioè **2 terzi**, in **4 parti** uguali, trovando **1 quarto di 2 terzi** che è uguale a **2 dodicesimi**, cioè **1 sesto.***

Semplifico

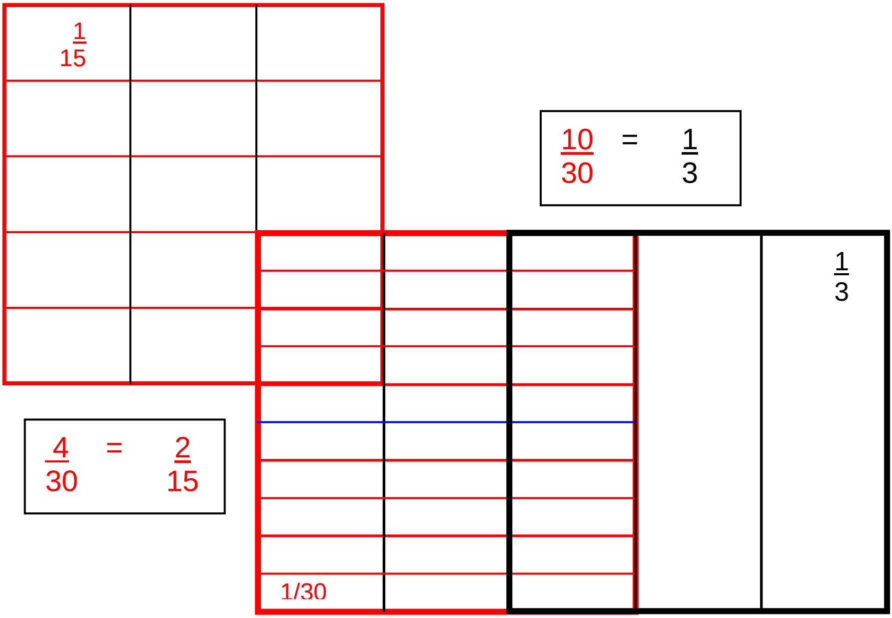
$$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{1}{6}$$

***1 mezzo* di 1 terzo** *= 1 sesto*



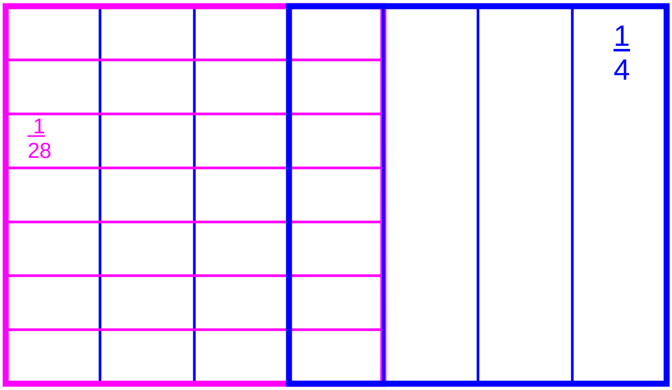
Equivalenza tra frazioni

L'equivalenza di 2 frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 frazioni equivalenti raffigurate in 2 quadrati lucidi trasparenti del set lucido, frazionati in un solo senso e/o in entrambi i sensi.



Uso del colore

Nelle figure che rappresentano frazioni con denominatori multipli di quelli primi *2, 3, 5, 7, (es. 30/30, con denominatore 30 (linee rosse) multiplo di 2 (linea azzurra), di 3 (linee nere), e di 5 (linee rosse))*, restano visualizzate tutte le **linee** diversamente **colorate** per le diverse frazioni con denominatore sottomultiplo *(di 30 nell'esempio)*, e prevale, per l'intero **perimetro**, il colore del denominatore primo più grande *(5 rosso nell'esempio, il cui colore rosso prevale sul nero di 3 e sull' azzurro di 2)*
Il *violetto di 7* prevale su tutti.



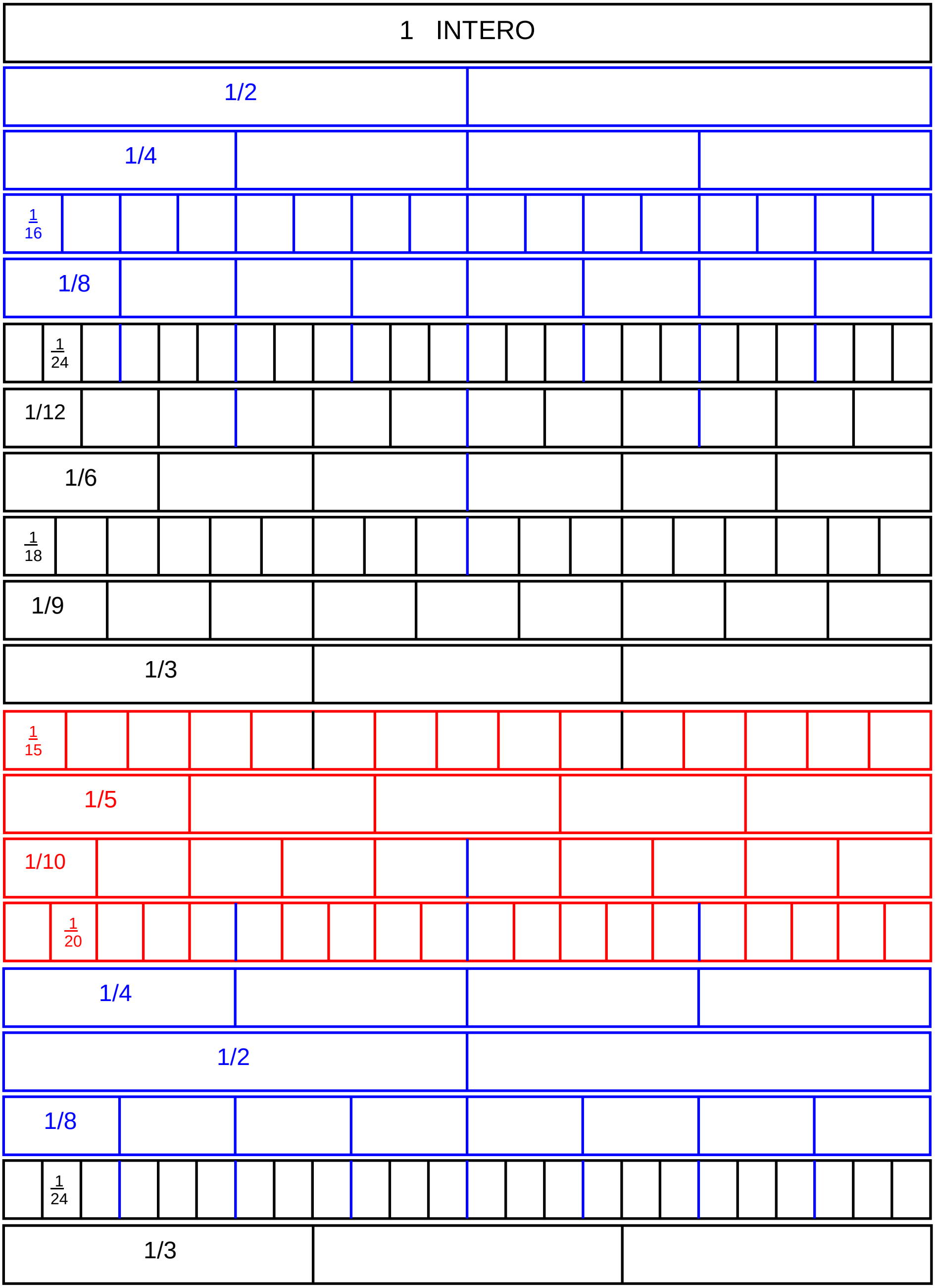
$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

"Giocare a carte" con le frazioni

Con i quadrati del **set lucido concreto** si possono fare le equivalenze anche "***giocando a carte***", tra 2 o più alunni, dividendosi in ugual numero i quadrati del set come "carte" da gioco. Poi ognuno gioca un quadrato e il successivo può "*prenderne*" uno giocato se può farci **un'equivalenza** con un altro che ha in mano: *es. 3/3 prende 18/18, ma non 5/5,* ecc….**L'intero,** equivalente a **tutte le carte**, le prende tutte e viene preso da tutte.

Il SET LUCIDO è brevettato ed è stato pubblicato da:
1 -RAFFAELLO editrice, Monte San Vito, Ancona 1993.
2 -BREVETTO n.° 00232006 del 10 / 8 / '99.
3 -RIVISTA "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", n°3, vol. 30A, maggio '07. Centro ricerche didatti che UGO MORIN.

SET LINEARE DELLE FRAZIONI

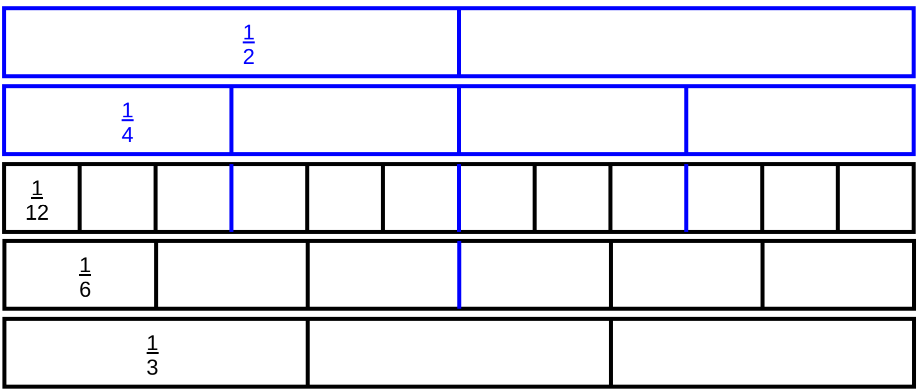


Equivalenze, addizioni e sottrazioni.

Il **set lineare** delle frazioni si compone di **strisce** di uguali dimensioni, frazionate dai 2/2 fino ai 30/30, con linee di colore diverso per i denominatori primi di *2/2 (azzurro), 3/3 (nero), 5/5 (rosso), 7/7 (violetto), 11/11 (verde), 13/13 (arancio),* e rispettivi **multipli.** Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: ad es. il *rosso di 5* prevale sull'*azzurro di 2,* ecc.
Le strisce del set sono utilizzabili in tavole sinottiche, o separatamente. All'inizio, infatti, si può lavorare **un po'** con le **singole strisce,** spostandole. Poi anche solo osservando le frazioni nella **tavola sinottica**, che si può stampare per **ciascun alunno.**
Con il set lineare si possono visualizzare e capire facilmente **equivalenze, addizioni e sottrazioni** tra le frazioni, e la loro **riduzione** ai minimi termini e al minimo comune denominatore.

Equivalenza** di frazioni e riduzione ai **minimi termini.

3/12 = 1/4 *4/12 = 2/6 = 1/3* *6/12 = 2/4 = 1/2*



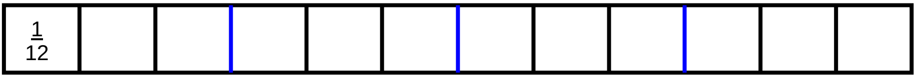
4/6 = 2/3 *3/6 = 1/2* *10/12 = 5/6*

Addizioni, sottrazioni e scomposizioni

di frazioni con ***denominatore uguale***

4/12 + 3/12 = 7/12

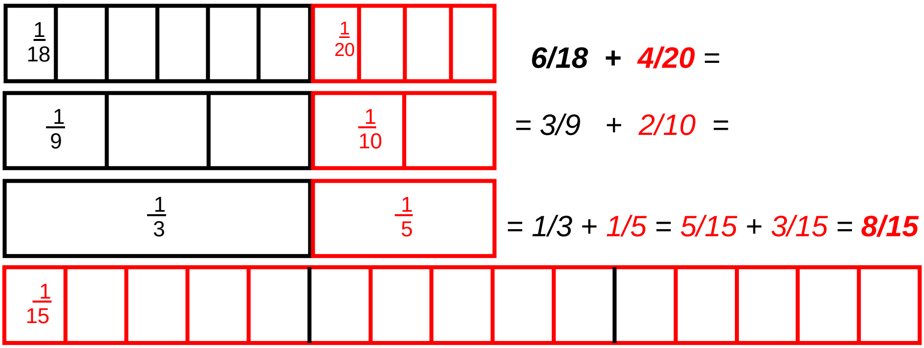
9/12 – 5/12 = 4/12 = 1/3



10/12 *= 6/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 = ecc…*

1 *= 12/12 = 8/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 + 2/12 = 4/12 per 3 volte.*

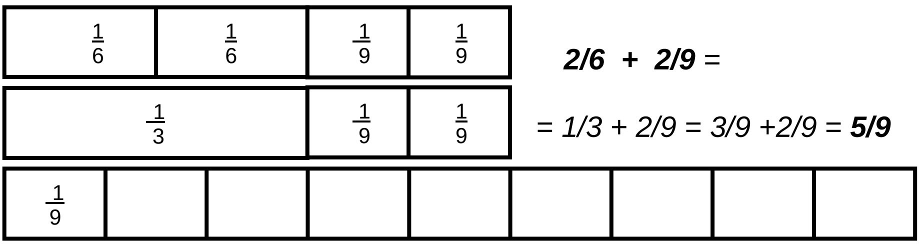
Addizioni e sottrazioni *di frazioni con* ***denominatore diverso*** *e da ridurre ai* ***minimi termini***



6/18 + 4/20 *=*

= 3/9   + 2/10 =

= 1/3 + 1/5 = 5/15 + 3/15 = ***8/15***



2/6 + 2/9 *=*

= 1/3 + 2/9 = 3/9 +2/9 = ***5/9***

Negli esempi fatti si capisce chiaramente perché bisogna ridurre ai **minimi termini** e al **minimo comune denominatore** frazioni con denominatore diverso per poterle addizionare o sottrarre. Le operazioni e i concetti vengono facilmente compresi e consolidati mediante le **illustrazioni** e l'**applicazione** in esercizi pieni di **significato**. Sarà poi molto più facile capire le **regole generali** e l'uso dei **simboli astratti**, con numeri più grandi.

Esercizi e problemi

Con i 2 set invece si fanno "**esercizi**", ma molto utili perché significativi, come dice Hans **Freudenthal**: *"Ma vi è un **modo di fare esercizio** (incluso anche lo studio a **memoria**), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al **tesoro dell'intuizione:** si tratta dell'**esercizio accoppiato** con l'apprendimento per **intuizione**." ("Ripensando l'educazione matematica", pag. 150)*
Con i set si può anche rappresentare la soluzione di **alcuni problemi**, come s'è visto alla precedente **pag. 7.**

Didattica laboratoriale
e animazione al computer e alla L.I.M

Gli alunni possono lavorare attivamente con i set, prima con la **guida** dell'insegnante, poi anche in modo autonomo, magari aiutandosi, in coppia, **inventando** equivalenze ed operazioni, anche solo oralmente e in tempi limitati: l'importante è che facciano **lavorare il cervello**, con un approccio laboratoriale, secondo il detto: *"Se ascolto dimentico, se vedo ricordo, **se faccio imparo**"*: "***faccio***" = ***agisco***, anche e soprattutto come attivazione dei processi cognitivi e linguistico-espressivi, con parola cannocchiale… ***"agis-co-gito."***

Se le operazioni vengono **anche scritte**, lavorando così, **non è necessario *"correggere"*** tanti lavori diversi. L'insegnante può invece seguire gli alunni aiutando e incoraggiando chi ne avesse bisogno.

All'inizio si può lavorare un po' con le frazioni più semplici e con le **singole strisce** del **set lineare**. Poi si può usare anche solo osservando le frazioni nella **tavola sinottica completa**, che si può stampare per **ciascun alunno.**

Lo scrivente, da maestro, fece lavorare nel modo suddetto gli alunni con un set lineare molto semplice, insieme con **altri sussidi**, in classe quarta e quinta, con ottimi risultati, riconosciuti anche da alcuni professori della scuola media.

Stampando i set su **lucidi trasparenti**, si possono proiettare con la **lavagna luminosa.**

Vi è poi **l'animazione al computer e alla L.I.M.,** disponibile nel sito internet *www.monachesi.it*

Trampolino di lancio e continuità dinamica

Lavorando con i 2 set si usano i codici **iconico e cromatico** insieme con quelli **verbale e simbolico,** attuando la **trasposizione o "trattamento"** della rappresentazione da un livello intuitivo-concreto a quello verbale e simbolico-astratto, e viceversa, per favorire la comprensione e l'astrazione concettuale. Le equivalenze e le operazioni rappresentate usando i set con **illustrazioni a colori**, vengono anche **verbalizzate** ed espresse con i **simboli matematici**, e viceversa, per "*caricare*" di significato il linguaggio verbale e capire il significato dei simboli matematici astratti.

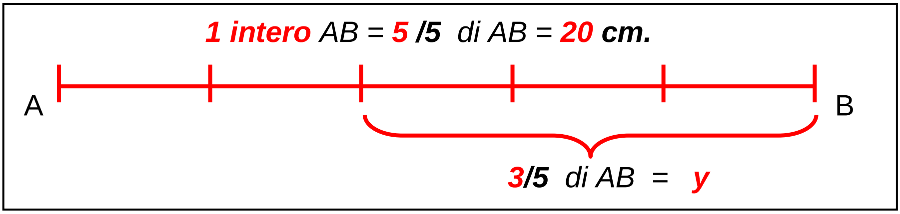
I 2 set tuttavia sono ovviamente **riduttivi**, e perciò vanno integrati con altre rappresentazioni, come tutti i sussidi e le rappresentazioni **concrete** di **concetti astratti**, e tanto più di un concetto così complesso come quello delle frazioni.
Un uso corretto dei 2 set, integrato con altri sussidi, può perciò facilitare molto l'**astrazione concettuale** e la **comprensione** del significato delle operazioni e dei linguaggi verbale e simbolico usati, che per le frazioni sono particolarmente difficili: comprensione che è fondamentale per motivare, sollecitare ed **attivare il pensiero**, e per la soluzione dei problemi.

Un uso graduale dei 2 set fin dalla **classe quarta** della scuola primaria, secondo le capacità degli alunni, può contribuire ad una maggiore e migliore **continuità dinamica** tra i 2 ordini di scuola, come un buon **trampolino di lancio,** insieme con altri sussidi, per questi ed altri obiettivi, verso l'astrazione intelligente e la comprensione del linguaggio, delle operazioni e dei concetti matematici. Ciò è fondamentale per poter pensare in modo autonomo e consapevole, risolvere problemi, e rendere interessante e significativa la matematica, evitando il vuoto verbalismo e il formalismo mnemonico, che sono una delle cause principali della disaffezione e dell'insuccesso scolastico in questa ed altre discipline.

FRAZIONE COME *OPERATORE*

1-Problema diretto: *Calcolare i **3/5** di **20**.*

Il testo implica che **20** è il valore dell'**intero 5/5,** che si può rappresentare con un **segmento** diviso in **5 parti** uguali.



Per calcolare il valore di **1/5 ,** con la regola riconosciuta, si fa **20** ***diviso 5 (denominatore) = 4***

Ma sembrerebbe più logico fare 20 ***diviso 5 (numeratore)*** perché **i quinti** dell'intero, di cui si conosce il valore 20, sono **5**, quantificati dal ***numeratore 5*** dell'intero **5 quinti.**
Per calcolare il valore di **3 quinti** si fa **4 per 3 (numeratore)** = 12.

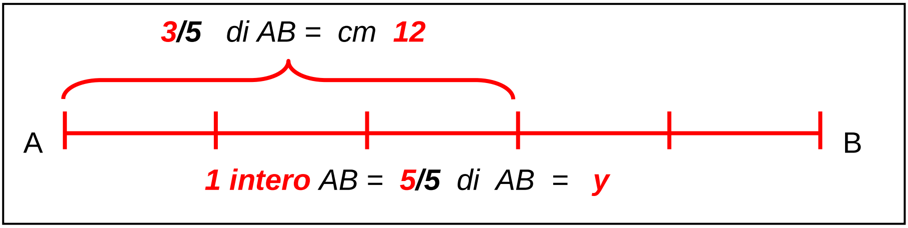
Perciò, in base al **diverso significato** e **funzione** del numeratore e del denominatore, con la logica proporzionale del **3 semplice diretto** con i **soli numeratori** e i **valori** delle frazioni, sarebbe coerente fare:

*20 **diviso numeratore 5** per numeratore 3.*

Il testo del problema diretto si potrebbe riformulare così:

*Il valore dell'intero **5 quinti** è **20.***
*Qual è il valore dei suoi **3 quinti** ?*

2-Problema inverso: *I 3/5 di un segmento misurano 12 cm.*
*Quanto misura **l'intero segmento**?*



Per calcolare il valore di **1**/**5** si fa **12** **diviso** **3** ***(numeratore)*** = 4.
Si fa **diviso** **3** perché **i quinti** di cui conosco il valore **sono 3.**
Per calcolare poi il valore di **5**/**5,** con la regola consueta, si fa ***4 per 5 ("denominatore")*** = 20.
Ma sembrerebbe più logico fare ***4 per 5 (numeratore)***, perché **i quinti** dell'intero, di cui si deve calcolare il valore, **sono 5**, quantificati dal ***numeratore 5*** dell'intero **5 quinti.**
Perciò, in base al **diverso significato** e **funzione** del numeratore e del denominatore, con la logica proporzionale del **3 semplice diretto** con i **soli numeratori** e i **valori** delle frazioni, sarebbe coerente fare:

*12 diviso numeratore 3 **per numeratore 5.***

Le **operazioni** e i numeri sono sempre gli **stessi** in entrambi i procedimenti: quello che **cambia** è il **significato** di uno dei numeri, (5 negli esempi fatti), che con la regola **consueta** è sempre **denominatore**, sia nella formula **diretta** che in quella **inversa,** mentre con la logica del **3 semplice** diretto è sempre **numeratore**. Quando si usano i **segmenti frazionati** per spiegare tali problemi, come negli esempi, si visualizzano le **parti uguali** (unità frazionarie) dei segmenti stessi, indicate dai **numeratori,** e il loro corrispondente **valore,** con la **logica proporzionale** riferita ai **soli numeratori** e ai **valori** delle frazioni, a **livello intuitivo,** senza esplicitarlo. Poi, siccome le operazioni e i numeri sono gli stessi, **si esplicitano** e si enunciano le **regole consuete** includendo anche il **denominatore**, il quale, cacciato dalla **porta intuitiva** rientra dalla **finestra formale.**

Proporzionalità diretta tra i soli numeratori e i valori delle frazioni aventi lo stesso denominatore

*1- Problema **diretto***	*2 - Problema **inverso***
1 quinto = ? 2 quinti = ? ***3 quinti* = *y*** 4 quinti = ? ***5 quinti (1 intero) = 20*** 6 quinti = ? etc.	1 quinto = ? 2 quinti = ? ***3 quinti* = *12*** 4 quinti = ? ***5 quinti (1 intero) = y*** 6 quinti = ? etc.
5 : 20 = 3 : y	***3 : 12 = 5 : y***

Come si vede dalla tabella, in una serie di frazioni diverse con lo stesso denominatore, **variano** solo i **numeratori**, che sono in un rapporto di **proporzionalità** diretta con **i valori** delle rispettive frazioni, compreso l'**intero**, che è anch'esso una **frazione apparente**. Perciò, conoscendo il valore di una frazione qualsiasi, compreso l'intero, si può calcolare il valore di tutte le altre, compreso l'intero, **dividendo** il valore noto di una frazione diviso il **numeratore** della stessa, e **moltiplicando** il risultato per il **numeratore** della frazione di cui si vuol trovare il valore.
Verrebbe meno così la distinzione tra problemi diretti e inversi, poiché il **procedimento** risolutivo sarebbe sempre **lo stesso.**

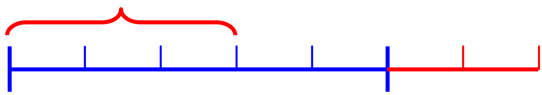
Come se i **quinti** fossero **mele.**
Tale procedimento però, valido a **livello intuitivo**, non è riconosciuto formalmente: esso è una specie di ***"scorciatoia"*** che esclude e ***"baypassa"*** il denominatore, che invece non può essere escluso perché è un termine essenziale della frazione, sempre presente nella procedura corretta e nei **calcoli formali.** In questi però, spesso i **numeratori** diventano **denominatori**, (nella divisione) e viceversa, e magari vengono anche semplificati, specialmente nelle espressioni complesse, tenendo conto soltanto della **loro posizione** (sopra o sotto), e **trascurandone** il **significato.**

Proprio il **significato** è invece alla base del procedimento intuitivo del **3 semplice diretto** con i **soli numeratori** e **i valori** delle frazioni aventi lo stesso denominatore, in cui si tiene conto non della **posizione** di un numero, (sopra o sotto), come si fa nel calcolo formale, ma della **sua funzione: *denominatore,*** *che serve a* ***denominare*** le unità frazionarie, o ***numeratore***, *che* ***quantifica*** le stesse unità, e che perciò è in un rapporto di **proporzionalità diretta** con il **valore** delle diverse frazioni aventi lo **stesso denominatore**. Questo, infatti, essendo **costante** nelle diverse frazioni, è **irrilevante**, perché non incide sui **diversi valori** delle frazioni, i quali **dipendono** esclusivamente dai **numeratori variabili**, **direttamente proporzionali** ai valori delle frazioni aventi lo stesso denominatore, come è bene evidenziato nella tabella che segue.

3 -Problema ***composto***

Da una ***frazione*** *(all'* ***intero*** *e dall'* ***intero****) a un'altra* ***frazione***

1 quinto = ?
2 quinti = ?
3 quinti = ***y***
4 quinti = ?
5 quinti (intero) = ?
6 quinti = ?
7 quinti = ***28***
8 quinti = ?
Ecc….



7 : 28 = 3 : y

Nel problema in tabella, non si fa alcun riferimento all'intero, ma soltanto a **due frazioni** aventi lo stesso denominatore, evidenziando chiaramente la **proporzionalità diretta** tra i soli **numeratori** e i **valori** delle frazioni stesse.

Se applico le **formule consuete,** tale problema risulta **composto** da 2 problemi, uno **inverso** e l'altro **diretto.**
Infatti devo **prima** calcolare il valore dell'**intero 5/5** conoscendo il valore 28 della frazione 7/5, facendo *28 **:** 7 x 5 = 20.*
Poi il valore dei 3/5 dell'intero 5/5 facendo *20 **:** 5 x 3 = 12.*
Metto tutto in espressione *28 **:** 7 x 5 **:** 5 x 3 =* ***28 : 7 x 3*** *= 12*

Ma con la logica del **3 semplice** diretto con i **soli numeratori** e i **valori** delle frazioni aventi lo stesso denominatore**,** dalla **proporzione** in tabella, ottengo le **stesse operazioni** con gli **stessi numeri** e lo **stesso risultato.**

Infatti ***7 : 28*** = ***3 : y***

da cui *7 y = 28 x 3,*

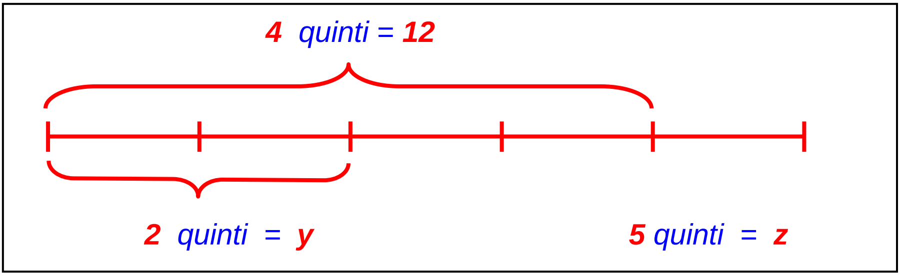
ed infine *y* = ***28 : 7 x 3*** *= 12*

Come si otterrebbe, inoltre, includendo nella proporzione anche i denominatori, cioè ***7/5 : 28*** = ***3/5 : y*** , e calcolando poi la y con la corretta procedura formale.

Problema: ***un cucciolo in pista***

La **logica proporzionale** con i **soli numeratori** e i **valori** delle frazioni aventi lo stesso denominatore appare evidente nel problema che segue che, come in quello precedente, non fa alcun riferimento **all'intero,** ma soltanto a **due frazioni** con lo stesso denominatore di esso (che peraltro è anch'esso una **frazione apparente**).

*Ugo ha percorso in bicicletta **12 km** che sono i **4/5** di una pista ciclabile. Il suo cucciolo, rincorrendolo, ne ha percorsi i **2/5.***
Quanti km ha percorso il suo cucciolo?



Si intuisce subito che i **2 quinti** percorsi dal cucciolo sono la **metà** dei **4 quinti** percorsi da Ugo, cioè **6 km.** Viene spontanea la **proporzione** con i soli **numeratori** $12 : 4 = y : 2$
da cui $4\,y = 12 \times 2$, ed infine $y = 12 : 4 \times 2 = 6$

Se no, con la **regola consueta**, bisogna calcolare:
-prima il valore dell'**intero 5/5**, cioè $12 : 4 \times 5 = 15$
-poi il valore dei suoi **2/5**, cioè $15 : 5 \times 2 = 6$
Sintetizzando tutte le operazioni in una **sola espressione** si ottiene:
2 quinti della pista $= y = 12 : 4 \times 5 : 5 \times 2 = 12 : 4 \times 2 = 6$

Che sono esattamente le **stesse operazioni** con gli stessi **numeri** e lo stesso **risultato** ottenuti dalla proporzione già vista con i **soli numeratori** e i valori delle frazioni $12 : 4 = y : 2$

Come si otterrebbe inoltre includendo nella proporzione anche i denominatori, cioè $12 : 4/5 = y : 2/5$, e calcolando poi la y con la corretta procedura formale.

Uno strano divorzio

La logica proporzionale del **3 semplice diretto** con i **soli numeratori** e i **valori** delle frazioni aventi lo stesso denominatore**,** consente perciò una soluzione **intuitiva informale**, una specie di ***"scorciatoia"***, non contemplata dalle regole matematiche.
In essa infatti, sulla base del diverso **significato** e della diversa **funzione** del numeratore e del denominatore, **si prescinde** dal **denominatore,** che invece non può essere escluso, provocando così, a causa della **semantica**, un "***divorzio***" tra i 2 termini della frazione, che il **rigore matematico** non può ammettere. E si potrebbe dire: "*La semantica non separi ciò che la matematica ha unito.*"

Ma **René Thom** medaglia Field nel '58 (il nobel della matematica) osserva: *"Si accede al **rigore assoluto** solo **eliminando il significato.** Ma se si deve scegliere tra **rigore e significato**, scelgo quest' **ultimo** senza esitare."*

Ritengo perciò molto importante tenere conto **il più possibile del significato**, e grazie ad esso risolvere i problemi magari anche con **modalità intuitive** non contemplate dalla disciplina formale, anche per capire meglio le procedure e gli algoritmi formali riconosciuti.
Spesso tuttavia ciò non è possibile, ed è necessario adottare e apprendere comunque le **procedure e gli algoritmi formali riconosciuti**, con le loro regole, che fondano il mirabile edificio del linguaggio matematico, tanto più affascinante quanto più si riesce a penetrarne i significati profondi e apprezzarne la rigorosa coerenza.

Queste riflessioni non devono creare difficoltà agli alunni, con i quali l'insegnante sa come regolarsi per far capire i concetti con **semplicità e correttezza**, senza complicazioni inutili, ma anche **senza semplicismi banali** e mnemonici che inaridiscono il pensiero.

Problema: ***il volo del calabrone***

Come ho già detto, per risolvere i problemi **diretti e inversi** con le **frazioni** è possibile un procedimento **intuitivo abbreviato**, una specie di "***scorciatoia***" che esclude e "***baypassa***" **il denominatore**, e che si basa sul **diverso significato** del numeratore e del denominatore, senza ricorrere al ben **noto algoritmo** riconosciuto e formalmente corretto della **frazione come operatore,** che invece include anche il **denominatore.** Anche nel problema di Gamow che segue è possibile una soluzione semplicissima, direi **tautologica**, basata sulla comprensione del **significato** delle parole e del testo, a livello "***semantico***", senza ricorrere al complesso **algoritmo** della **progressione** geometrica, a livello "***sintattico***."

Due treni *partono contemporaneamente da due stazioni A e B, situate a* ***160 km*** *di distanza 1'una dall'altra e si dirigono 1'uno verso 1'altro alla velocità di* ***80 km all'ora****.*
Un ***calabrone*** *parte nello stesso istante da A e si dirige verso B seguendo la via ferrata con una velocità di* ***100 Km all'ora.***
Quando incontra il treno proveniente da B prende paura, inverte la marcia e riparte in direzione di A. Vola così ***da un treno all'altro****, finché questi si incrociano e il calabrone fugge via. Qual è la* ***distanza totale*** *percorsa dal* ***calabrone*** *nei suoi* ***andirivieni ?***

SOLUZIONE

Poiché i **2 treni** corrono ciascuno a **80 km l'ora**, dopo un'ora avranno percorso fra **tutti e due 160 km** e quindi, essendo partiti a 160 km di distanza si incroceranno. Poiché il calabrone ha volato per tutto quel tempo, cioè **per un'ora**, e sempre a **100 km l'ora**, esso avrà percorso **100 km.**

Vittorio Duse osserva: *"Se ci si prova a risolvere il problema seguendo i* ***singoli voli*** *e le singole virate del calabrone, si trova la stessa risposta come somma di una* ***progressione geometrica di ragione 1/9****, ma con un procedimento molto più* ***complesso e laborioso.***

*Anche ammettendo che una **macchina** possa risolvere un problema di questa fatta, lo risolverà dopo aver avuto dall'uomo le opportune istruzioni e lo risolverà col metodo più **meccanico**, cioè con quello **più lungo**. Ma nella **mente** dell'uomo **cos'è che muove il pensiero** in primo luogo verso la risoluzione e poi verso un tipo di risoluzione piuttosto che verso un altro?"* (*Vittorio Duse*, "Per un insegnamento moderno della matematica elementare", *La Scuola)*

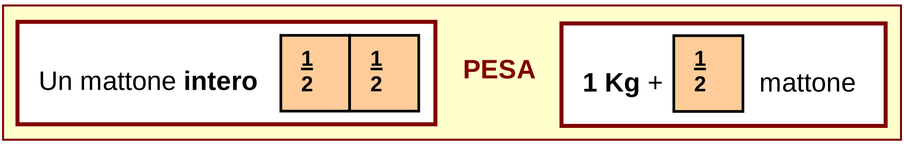
Problema: ***il peso del mattone***

Il **testo** del problema che segue è formulato in modo da trarre in inganno, cortocircuitando il ragionamento logico con un uso fuorviante delle **parole**, che **inducono a pensare** in modo errato e a rispondere: **1 e mezzo.**

*Un **mattone** pesa **1Kg** più **mezzo** mattone: quanto pesa il **mattone**?*

SOLUZIONE

Il testo è un'**equazione verbale**: rappresentata con il **disegno** è molto più intuitiva e facilita la soluzione.



Si vede infatti chiaramente che al posto di **mezzo mattone** c'è **1 kg.**:

Perciò ***1 mezzo** del mattone* **= 1 Kg,**

2 mezzi** del mattone, (cioè 1 mattone **intero**) = **2 Kg

Problema: ***settimana corta dell'età***

Il **problema** seguente è formulato con un **linguaggio ordinario** che **nasconde** e perciò rende più difficile capire i concetti matematici di frazione e proporzione in esso presenti, necessari per la soluzione.

***Senza** contare i **sabati** e le **domeniche** Giorgio avrebbe **40 anni.** Quanti anni ha **in tutto** Giorgio contando anche i **sabati** e le **domeniche**?*

SOLUZIONE

Molti pensano di calcolare tutti i giorni mancanti tolti in 40 anni, da aggiungere nuovamente agli stessi. E poiché **1 anno** ha **52 settimane** e **1 giorno** (2 nei bisestili), si ha *2 g per 52 s per 40 a = 4160 g ; più 1 g per 40 a ; più 10 g dei 10 anni bisestili = 4.210 g.*
Diviso 365 fanno 11 anni e 195 giorni, da aggiungere a 40 anni.
Ma i giorni sono stati tolti **non da 40 anni,** bensì **dall'età totale**, che è proprio quella da trovare. Perciò tale procedimento è errato.

Posso invece considerare che **1 giorno** è **1 settimo** di un'intera settimana, che è formata da **7 settimi.** Se escludo sabato e domenica prendo **5 giorni** per ogni settimana, cioè **5 settimi**, che corrispondono a **40 anni** dell'età totale. Si tratta perciò di un **problema inverso** con le **frazioni.** Quindi

1 settimo *dell'età totale =* ***40 : 5*** *=* ***8*** *anni*

7 settimi *=* ***8 x 7*** *=* ***56*** *(età totale)*

Posso anche impostare una **proporzione**: *pongo* ***y*** *=* ***età totale***

40 : 5 *=* ***y : 7***

da cui $5y = 40 \times 7$

ed infine $y = \mathbf{40 : 5 \times 7} = 8 \times 7 = 56$

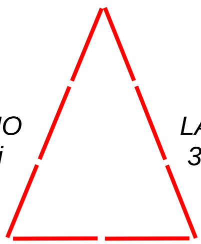
FRAZIONE COME *RAPPORTO*

Emma Castelnuovo, nel libro *"Didattica della matematica"*, mostra come gli alunni riescono a risolvere molto più facilmente i problemi di **rapporto** con l'uso di stecchini, mentre il disegno viene spesso fatto male e risulta perciò inutile o fuorviante.

Esempio: *"Un triangolo isoscele ha* ***la base*** *che è i* ***2 terzi*** *del lato* ***obliquo.*** *Il suo* ***perimetro*** *misura* ***80 metri.*** *Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?"*

Se si **costruisce** il triangolo con **stecchini** uguali si visualizza il rapporto e si intuiscono facilmente le operazioni da compiere.

LATO OBLIQUO
3 stecchini



LATO OBLIQUO
3 stecchini (o fiammiferi) **= *3 terzi***

BASE = 2 stecchini = ***2 terzi*** *del lato obliquo*

BASE **:** *LATO OBLIQUO = 2* **:** *3*

Ed ecco un problema analogo, ma più semplice: *"Un triangolo isoscele ha la* ***base*** *che misura la metà del lato* ***obliquo.*** *Il suo* ***perimetro*** *misura* ***50 m.*** *Quanto misurano i lati obliqui e la base?"*

In quarta elementare gli alunni lo trovano alquanto difficile: con gli **stecchini** diventa molto più facile.
Emma **Castelnuovo** osserva: *"E lo* ***stecchino****, questo materiale da nulla, assume per il bimbo un* ***valore enorme:*** *è il mezzo per risolvere dei problemi* ***costruendo e contando,*** *operazioni, queste, che* ***impongono*** *di* ***non verbalizzare."***

Certamente gli stecchini sono importantissimi per rappresentare con chiarezza quello che dice il testo, e **"costringono"** a fare una costruzione precisa ed un conteggio esatto; ma perché ***"impongono di non verbalizzare"?*** Non lo richiedono: senza però "**imporre**" affatto la sua esclusione.

Verbalizzare è importante per la **comprensione** delle **parole** e del **testo**. La quale ha senz'altro bisogno, soprattutto all'inizio, di rappresentazioni concrete, ma non per escludere **le parole** e i **simboli.** Anzi, al contrario, **per valorizzarli** e caricarli di significato, in modo tale che la loro comprensione diventi sempre più facile e diretta, senza più bisogno di rappresentazioni concrete, **astraendo** cioè dalle stesse.

Per assicurare la piena **comprensione** del testo, infatti, è molto importante,

sia
rappresentare **concretamente** il problema,
sia **l'inverso**, e cioè
verbalizzarne la rappresentazione concreta,

con parole piene di significato per evitare il vuoto **verbalismo**, del quale la **verbalizzazione significativa** è il miglior antìdoto: aumentando questa diminuisce quello.

Molto importante è anche la **verbalizzazione del procedimento risolutivo**, per mantenerne il **controllo**, che è un significativo traguardo per lo **sviluppo delle competenze** previsto dalle Indicazioni.

Perciò attenzione! I **sussidi concreti** sono molto importanti, ma non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e i **simboli matematici.** Anzi: ne devono costituire un potente **trampolino di lancio.**

Rappresentare, capire, verbalizzare

Il concetto di rapporto e i problemi con lo stesso sono difficili anche perché **estranei** all’esperienza degli alunni, che non capiscono il **significato** del testo, come avviene anche per altri problemi e argomenti. A ciò si può ovviare facendo **costruire**, **capire** e **verbalizzare** vari rapporti. In tal modo il concetto di rapporto diventa **familiare** agli alunni, che così **afferrano** il **significato** delle parole e sono poi in grado di comprendere **i testi** verbali e tradurli in appropriate **rappresentazioni** significative, sia scritte che mentali. Le quali, come dice Bruno **D’Amore**, costituiscono *“**l’anticamera logica** della soluzione”,* e consentono di trovare facilmente i procedimenti risolutivi e di capire **perché** si fanno certe operazioni e si applicano certe regole e formule.

Elena Valenti, nel libro *“La matematica nella nuova scuola elementare*”, afferma: *“la **comprensione** di un problema....ha **in sé già presente** un primo, forse ancora intuitivo, abbozzo del **procedimento di risoluzionE.”***

Ovviamente la comprensione del testo non basta; è indispensabile anche la padronanza delle **operazioni**, del **linguaggio** e dei **concetti logico-matematici**: ma la comprensione del testo può aiutare molto il ragionamento logico-matematico, specialmente nei problemi più intuitivi.

*(Vedi **“Problemi”** e “**Apprendimento-insegnamento”**, punto 6-LA COMPRENSIONE DEL SIGNIFICATO E’ ALLA BASE DEL RAGIONAMENTO)*

Rappresentare, capire, verbalizzare

Molto importante è la **verbalizzazione** orale significativa, con cui si esprimono i concetti e i significati rappresentati con il **disegno** o i **sussidi** concreti. Grazie alla verbalizzazione l'alunno sarà poi in grado di fare il processo **inverso**, e cioè di comprendere pienamente il **significato** dei **testi** verbali, e tradurli in **disegni** o **rappresentazioni** significative, che, come già detto, Bruno **D'Amore** considera *“**l'anticamera logica** della soluzione”,* poiché consentono di capire le **regole** e trovare i **procedimenti risolutivi** in modo logico, autonomo e consapevole, a volte anche originale.

Perciò attenzione! I sussidi e le rappresentazioni grafiche sono molto importanti, ma non devono far trascurare il **linguaggio** verbale e i **simboli** matematici. Anzi, ne devono costituire un potente **trampolino di lancio**, riempiendo di **significato** le parole ed i simboli astratti, come un prezioso **carburante** che alimenta i processi mentali logici, analogici e creativi. E il linguaggio verbale e simbolico, sarà tanto più pieno di significato quanto più si saranno curate adeguatamente la verbalizzazione e la simbolizzazione riferite all'esperienza e alle rappresentazioni concrete, in “**presa diretta**” con il **pensiero**.

Vediamo **un esempio** di **verbalizzazione**.

Agli alunni si fa **costruire** con degli stecchini, (o disegnare), un rettangolo, o altre figure, che si possono anche proiettare con la lavagna luminosa, e si fanno **verbalizzare** i rapporti sia **diretti** che **inversi** tra la base e l'altezza o altre dimensioni, per capire bene il **significato** delle parole e dei simboli usati. Tale attività è molto efficace per **comprendere** poi **altri testi** verbali e il procedimento risolutivo dei **problemi** e le relative formule.

Costruire _con stecchini_
o fiammiferi

Proiettare: lavagna luminosa

BASE = **5 quinti** (intero)

$h : b = 3 : 5$
$h : 3 = b : 5$
$b : h = 5 : 3$
$b : 5 = h : 3$

ALTEZZA = **3 quinti** della base

Si può **verbalizzare e concettualizzare** in vari modi la **stessa** rappresentazione concreta, **invertendo i rapporti**, nel modo seguente.

L'ALTEZZA sta alla BASE	_come_	_**3** sta a **5**_
La BASE sta all'ALTEZZA	_come_	_**5** sta a **3**_
La BASE sta a **5**	_come_	_l'ALTEZZA sta a **3**_

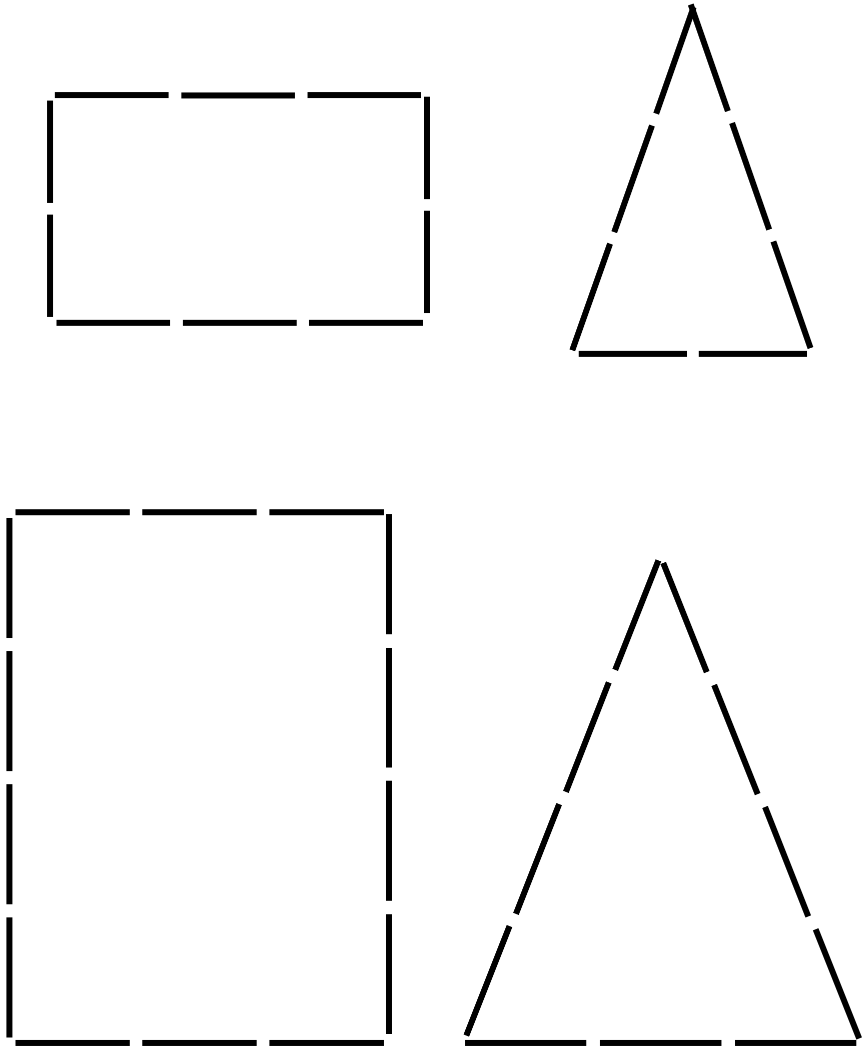
La BASE è **5 fiammiferi**, cioè **5 quinti**;
1 fiammifero è **1 quinto** della base;
l'altezza è **3 quinti** della base;
il perimetro è **16 quinti** della base.

L' ALTEZZA è **3 fiammiferi,** cioè **3 terzi;**
1 fiammifero è **1 terzo** dell'altezza;
la base è **5 terzi** dell'altezza;
il perimetro è **16 terzi** dell'altezza.

Il PERIMETRO è **16 fiammiferi**, cioè **16 sedicesimi**;
1 fiammifero è **1 sedicesimo** del perimetro;
la base è **5 sedicesimi** del perimetro;
l'altezza è **3 sedicesimi** del perimetro.

Verbalizzare i rapporti

Verbalizzare i rapporti diretti e inversi tra la **base e l'altezza** dei 2 rettangoli e tra la **base e il lato obliquo** dei 2 triangoli isosceli, come nella pagina precedente.



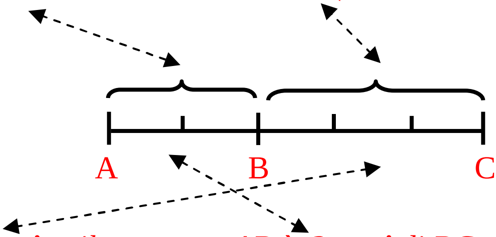
Verbalizzare in modi diversi una rappresentazione concreta.

Il seguente problema faceva parte delle prove di ammissione ad un corso: alcuni **laureati** (non in matematica) lo **sbagliarono**, applicando meccanicamente una formula errata, senza capire.

Calcolare la misura di 2 segmenti sapendo che la loro ***somma*** *è 20 cm e che* ***un segmento*** *è i* ***2 terzi*** *dell'* ***altro*** *(che è* ***3 terzi)***

AB = 2/3 BC

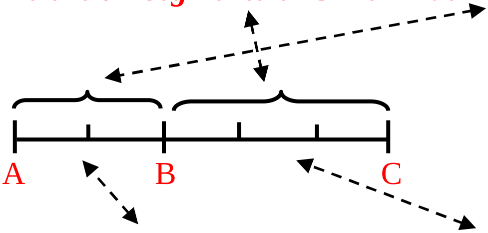
AB : BC = 2 : 3



Il segmento BC è ***3 terzi*** *e il segmento AB è* ***2 terzi*** *di BC.*
La loro somma è ***3 terzi*** *di BC +* ***2 terzi*** *di BC =* ***5 terzi*** *di BC*

Inverto il rapporto

Calcolare la misura di 2 segmenti sapendo che la loro ***somma*** *è 20 cm e che* ***un segmento*** *è i* ***3 mezzi*** *dell'****altro*** *(che è* ***2 mezzi)***



BC = 3/2 AB

BC : AB = 3 : 2

Il segmento AB è ***2 mezzi*** *e il segmento BC è* ***3 mezzi*** *di AB.*
La loro somma è ***2 mezzi*** *di AB +* ***3 mezzi*** *di AB =* ***5 mezzi*** *di AB.*

L'esempio fatto può essere **troppo difficile** perché esposto in forma sintetica: si può e si deve **semplificare,** se necessario, anche nei modi visti nelle pagine precedenti.

Verbalizzare in modi **diversi** la **stessa** rappresentazione concreta, e viceversa, **rappresentare** concretamente i **testi verbali**, consente di capire bene il problema e le operazioni per risolverlo, che altrimenti rischiano di essere l'applicazione **meccanica** di una regola. La quale in apparenza può sembrare **più semplice** e immediata: in realtà è solo più **semplicistica** se trascura e **cortocircùita** i **concetti** su cui si fonda.

Verbalizzare per capire il procedimento risolutivo

Un importante traguardo per lo sviluppo delle **competenze** previsto dalle Indicazioni è la **verbalizzazione** del **procedimento** risolutivo dei problemi, per capirlo e **controllarlo**, ragionando con **coerenza.**

Nel problema già visto con le frazioni si deve calcolare il valore di 2 grandezze conoscendone la **somma** e il **rapporto** ("terzo tipo").

Esempio. *La somma di 2 segmenti è 20 cm e **un segmento** è i **2/3** dell'**altro.** Calcolare la misura di ciascun segmento.*

La regola formale consueta è che si deve dividere la loro **somma (20)**, diviso la <u>**somma** (5),</u> di <u>**numeratore** (2) più **denominatore** (3),</u> della frazione (2/3) che ne esprime il rapporto, e poi moltiplicare il risultato (4) per il **numeratore** (2) e per il **denominatore** (3).

Ma se non **capisco perché** faccio le operazioni previste dalla suddetta regola, mi limito ad applicarla meccanicamente, come un **automatismo** mnemonico.

Se invece voglio **capire e ragionare** posso **verbalizzare** nel modo seguente osservando la **costruzione** concreta o il disegno.

*I 2 segmenti sono uno **2 terzi** dell'altro: il quale perciò è **3 terzi.***
*La loro **somma 20** corrisponde perciò a **2 terzi + 3 terzi**, cioè a **5 terzi** del segmento maggiore.*
*Se **divido 20** in **5 parti** uguali ottengo **4**, che è il valore di **1 terzo** del segmento maggiore, composto di **3 terzi**, la cui misura è perciò di **4 per 3 = 12 cm.***
*L'altro, che è **2 terzi** del precedente, misurerà **4 per 2 = 8 cm.***

Le operazioni sono le **stesse**, ma con la **verbalizzazione** e l'**osservazione** della rappresentazione **concreta** o del **disegno** si capisce molto meglio **perché** le eseguo.

La verbalizzazione suddetta **corrisponde all'equazione** con cui si può formalizzare il procedimento risolutivo.

pongo $BC = y$
$AB = 2/3\,y$

Equazione risolutiva: $\boldsymbol{y + 2/3\,y = 20}$

Il suo **sviluppo** corrisponde alla **verbalizzazione** fatta con il **linguaggio ordinario.** Infatti si ha:

$3/3\,y + 2/3\,y = 20$

$5/3\,y = 20$

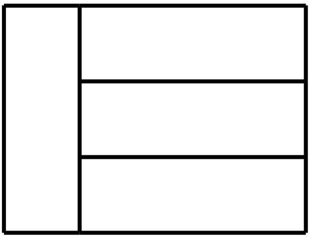
$y = 20 \times 3/5 = 20 : 5 \times 3 = 4 \times 3 = 12$ (misura di BC)

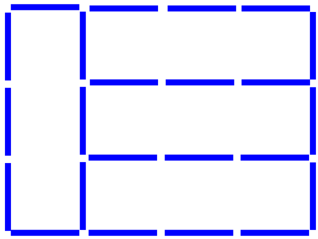
$2/3\,y = 12 \times 2/3 = 12 : 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ (misura di AB)

Il procedimento risolutivo dello stesso problema si può tradurre in una catena di rapporti uguali, una **doppia proporzione:**

$$\boxed{\overline{BC} : 3 = \overline{AB} : 2 = 20 : 5}$$ ***ecc..***

*PROBLEMA - La **scatola disegnata** ha 4 scomparti uguali. Il suo **perimetro è 70 cm**. Qual è la sua area?*





Costruendo la **scatola** con **stecchini o fiammiferi** uguali la soluzione è molto più facile e **si intuisce** subito. Si vede infatti che il **lato grande** dello scomparto verticale coincide con **3 latini** piccoli dei 3 scomparti orizzontali e con l'**altezza** (lato **minore**) di tutta la scatola. Perciò la **base** (lato **maggiore**) della scatola corrisponde a **4 latini piccoli** degli scomparti. Il **perimetro** della scatola corrisponde perciò a **4 + 3 + 4 + 3** = **14 latini** piccoli degli scomparti.
Dividendo il perimetro, **70 cm,** diviso in **14 parti** uguali, si ottiene **5 cm**, che è la misura di un **latino piccolo** degli scomparti. Quindi:

5 cm x 3 = 15 cm *(altezza = lato minore della scatola).*

5 cm x 4 = 20 cm *(base = lato maggiore della scatola).*

20 x 15 = 300 cm quadrati *(area della scatola).*

Dopo aver assicurato la comprensione intuitiva del problema e capito come si risolve grazie alla costruzione con gli stecchini, si possono **verbalizzare** i **rapporti** tra le varie dimensioni ricorrendo al linguaggio più formalizzato della matematica, dicendo ad esempio che l'altezza della scatola è 3/4 della base, che perciò è 4/4, e quindi la loro somma è 4/4 della base + 3/4 della base = 7/4 della base.
O viceversa che la base è 4/3 dell'altezza, che perciò è 3/3, e quindi la loro somma è 4 terzi dell'altezza + 3 terzi dell'altezza = 7 terzi dell'altezza.
E il perimetro è 14 terzi dell'altezza o 14 quarti della base, ecc.…

Un’insegnante una volta mi disse che preferiva far usare meno possibile agli alunni i sussidi concreti perché altrimenti essi ne avevano **sempre bisogno**, e trovavano **difficoltà ad astrarre** i concetti. Rimasi molto **sorpreso**, perché è vero il contrario.

Forse quell’insegnante **usava male i sussidi concreti.**

I sussidi concreti, infatti, **se usati bene**, sono un un potente **trampolino di lancio** verso l’astrazione, per far **capire meglio i concetti** ed esprimerli con i **linguaggi** ed i **simboli astratti,** evitando il **verbalismo** vuoto e l’apprendimento **mnemonico.**
I quali spesso dipendono proprio dal **mancato uso di sussidi** concreti adeguati, pensando che bastino le spiegazioni verbali, magari accompagnate da qualche disegno: così facendo, però, si rischia di mettere il **carro davanti ai buoi**.

I sussidi concreti, perciò, non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e l’uso dei **simboli astratti.**
Anzi, devono essere il loro **trampolino di lancio.**

Il linguaggio verbale e simbolico, infatti, sarà tanto più pieno di significato quanto più si sarà curata adeguatamente la **verbalizzazione** riferita all’esperienza concreta, in “**presa diretta”** con il **pensiero.**

E grazie a ciò diminuirà sempre più anche la necessità di esempi concreti, peraltro spesso ugualmente importanti, per capire, ragionare e risolvere problemi, in cui riveste un ruolo fondamentale la **comprensione semantica** delle **parole** e del **testo,** come dimostrano molte ricerche.

Mussen-Conger-Kagan, nel libro “Linguaggio e sviluppo cognitivo”, affermano: *“Dagli scritti di **Piaget** si può di tanto in tanto dedurre implicitamente che il bambino di **5 anni** è **incapace** di serializzare in qualsiasi dimensione, e nessun bambino di 7 anni è capace di ragionare su qualsiasi argomento **senza oggetti concreti.***

*Queste affermazioni categoriche sono ancora **controverse**.*

*La maggior parte dei bambini di **5 anni** sostiene che **il proprio padre** è più grande di **un coniglio**, e che un coniglio è più grande di **un topo,** e si rende conto che il **proprio padre** è più grande di **un topo**, rivelando così una capacità di **ordinare** gli oggetti secondo una dimensione di grandezza.*

*La differenza tra questo problema e quelli utilizzati da Piaget consiste nel fatto che il problema del **padre** e del **coniglio** si riferisce a **nozioni molto familiari. Se non capisce** la domanda che gli viene fatta, il bambino agirà ovviamente a un **livello immaturo**.*

***Piaget** sostiene ad es. che il bambino di **8 anni non riesce** a **classificare** se stesso in **2 dimensioni contemporaneamente**, cioè non riesce a considerarsi nello stesso tempo membro di **una città** ed anche di **un paese.** Uno dei motivi di questa carenza dipende dal fatto che il bambino **non comprende** completamente il **significato semantico** delle parole **città e paese**: non sa che una città fa parte di una nazione. Si può dimostrare che il bambino di **5 anni è capace** di **doppie** classificazioni **quando comprende** i 2 concetti.*

*Il bambino di 5 anni sa di far parte della famiglia **Rossi** e, nello stesso tempo, del sesso **maschile.***

Mussen-Conger-Kagan concludono: *“I passi avanti compiuti sulla via del **linguaggio** aprono la strada ai progressi nell’ apprendimento complesso, nella formazione dei concetti, nel **pensiero**, nel ragionamento e nella soluzione dei problemi. Queste **attività cognitive** ad alto livello vengono considerevolmente accentuate dalla **mediazione verbale**. Il **linguaggio** e il processo di definizione (mediazione verbale), esercitano **un’influenza enorme** sul processo di soluzione dei problemi ecc....*

Guido Petter fa il seguente esempio:
*"A **Torino** vive circa un **milione di persone**. Sulla testa di una persona non crescono più di **300.000 capelli**. E' possibile affermare che a Torino ci sono sicuramente **2 persone** con lo **stesso numero** di capelli?".*

La soluzione è molto più facile se il problema, con la stessa struttura logica, contiene però dati più intuitivi. Ad esempio:

*"Sappiamo che **i mesi** dell'anno **sono 12.** In una certa classe di una scuola ci sono **13 bambini.** E' possibile dire che in quella classe ci sono certamente **2 bambini** nati nello **stesso mese** ?".*

(G. Petter, "Psicologia e scuola primaria")

Keith Devlin scrive:

*"Se trovavano un prodotto che costava 4 dollari per un pacco da **3 etti** e un pacco più grande di **6 etti** per 7 dollari molti acquirenti confrontavano in realtà **i rapporti 4/3** e **7/6** per vedere qual era il maggiore. Per cui i ricercatori avevano inserito nel test la domanda: "Qual è maggiore tra **4/3 e 7/6** ?" Ma la stessa acquirente che se l'era **cavata benissimo** al supermercato, nel **test sbagliava.** Ecc…*
*I bambini (venditori di noci di cocco) erano sempre precisi quando sedevano dietro la loro bancarella, ma si dimostravano veri e propri asini quando veniva loro proposto lo stesso **identico problema** aritmetico, espresso però in una tipica **formulazione scolastica.***
*I ricercatori ne rimasero così impressionati e incuriositi che coniarono un nome apposta per tutto ciò: **matematica di strada.** Ecc…(Impressionati da un fatto così **ovvio**? Un po' **tonti**! (Nota dello scrivente)) Poiché, sia i bambini di Recife sia gli alunni di Herndon avevano dimostrato di essere capaci di operare tranquillamente con l'aritmetica in alcuni **contesti a loro familiari,** quando i numeri avevano per loro **un significato**, sembra chiaro che **il significato,** o il senso pratico immediato, ha un ruolo **fondamentale** nella nostra capacità di fare dell'aritmetica."*

(Keith Devlin, "L'istinto matematico")

Mente linguaggio apprendimento

L'importanza delle conoscenze ben organizzate e strutturate è stata evidenziata dalle teorie degli *"**script**"*, *"**frame**"*, *"**schemi**"*, presentate da Dario **Corno** e Graziella **Pozzo** nel libro *"**Mente, linguaggio, apprendimento**"*, in cui si afferma: *"Pare che la maggior parte delle nostre capacità di **ragionamento** sia legata a **schemi** particolari di particolari **ambiti di conoscenza**."*

Tale conclusione è suggerita da alcuni **esperimenti,** tra cui quello di **Laird** e **D'Andrade**, in cui è stato proposto a uno stesso campione di persone 2 problemi di **implicazione logica,** *("se…… allora"),* con la **stessa struttura** logica, ma dal contenuto **estraneo**, nel primo, e molto più **familiare** nel secondo, riscontrando una percentuale di **successi 5 volte superiore** nella soluzione del secondo problema.

D. **Corno** e G. **Pozzo** osservano: *"**Il primo** caso **non** è **familiare**, e i soggetti, non possedendo **gli schemi** entro cui riportare il problema, possono solo attivare strategie di soluzione di problemi molto generali. **Il secondo** caso è più vicino a situazioni "**reali**" di soluzione di problemi. Una volta "**capìta**" la **situazione**, in quanto codificata in termini di un insieme relativamente ricco di schemi, si possono introdurre i vincoli concettuali degli schemi per risolvere il problema. E' come se lo **schema contenesse** già tutti i meccanismi di **ragionamento** comunemente richiesti nell'uso degli schemi. **Capire** il problema e **risolverlo** sono perciò quasi la **stessa cosa**."*

I **2 problemi** usati nel suddetto esperimento sono gli stessi citati nell'articolo "*Insegnamento **muro** e **ponte***", su L'Educatore, n° 1, a.s. 2008/'09, in cui Mario **Castoldi** scrive: *"Nel suo bel libro sulla valutazione degli apprendimenti, **Maurizio Lichtner** presenta, tra gli altri, questi 2 esempi per dimostrare quanto sia diverso l'apprendimento scolastico, fondato su un **ordine logico**, dall' apprendimento in situazioni di realtà, fondato su un **ordine pratico.***

*1-Hai le seguenti **4 carte.** Devi verificare il rispetto della seguente regola: ”Se su un lato c’è una **vocale**, sull’altro deve esserci un numero **dispari**”, voltando il minor numero di carte.*
Quali carte volteresti ?

E	M	7	4

*2 -E’ sera, al grande magazzino l’addetto controlla le operazioni della giornata. In particolare deve verificare che, in caso di acquisto **superiore a 30 $**, il tagliando **deve** essere stato **firmato** sul retro dal responsabile. Quali tagliandi deve voltare per verificarlo?*

40 $	25 $	***Ugo Re***	**……..**

Le 2 situazioni sono basate entrambe su *un’**implicazione logica***, e in entrambe si devono voltare la **prima** e l’**ultima** carta o scheda.

Infatti: se **vocale** (E) allora **dispari**; perciò se **non dispari** (4) allora **non vocale**.

Se **più** di **30 $** (40 $) allora **firma**; perciò se **non firma** (…) allora **non più** di **30 $.**

Ma il secondo problema è più facile perché è **più intuitivo.**

Come anche: se **piove** allora ci sono le **nuvole**; perciò, se **non** ci sono le **nuvole** allora **non piove**. Ma **non viceversa**. Condizione ***necessaria** ma **non sufficiente*** perché piova è che ci siano le **nuvole**.

Se PIOVE ---------► *allora* -------------► ci sono NUVOLE
NON PIOVE ◄------ *allora* ◄----- *se* NON ci sono NUVOLE

Se stai a **Roma** allora stai in **Italia,** perciò, se **non** stai in **Italia** allora **non** stai a **Roma**.

Se è **festa** allora **non** c’è **scuola**, perciò se c’è **scuola** allora **non** è **festa**.

Se **cane** allora **animale**, perciò, se **non animale** allora **non cane.**
Tutti **i cani** sono **animali,** ma **non tutti** gli **animali** sono **cani.**

Se **Ugo** allora **maschio**, perciò, se **non maschio** allora **non Ugo.**
Tutti gli Ugo sono **maschi**, ma **non tutti** i maschi sono **Ugo.**

Da non confondere con la ***doppia*** *implicazione o* ***coimplicazione logica***: ***Se e solo se* respiri** allora sei **vivo**, e ***viceversa.***
Condizione ***necessaria*** *e* ***sufficiente*** perché tu sia **vivo** è che **respiri.**

Se e solo se ***Se e solo se***

RESPIRI ◄--------► ***allora*** ◄--------► SEI VIVO
NON RESPIRI ◄--------► ***allora*** ◄--------► NON SEI VIVO

Se e solo se **tu** sei **mia madre** *allora* **io** sono **tuo figlio** e viceversa. Perciò se tu **non sei mia madre** allora io **non sono tuo figlio** e viceversa.

Se e solo se **oggi** è **giovedì** *allora* **domani** è **venerdì** e viceversa. Perciò se oggi **non è giovedì** allora domani **non è venerdì** e viceversa.

Mario **Castoldi**, nell'articolo citato con l'esempio dei 2 problemi, cita **Comoglio** che parla di un insegnamento *"**ponte**"*, un insegnamento **significativo**, con cui si cerca di collegare la conoscenza con la realtà, e di un insegnamento *"**muro**"*, che invece rende **inerte** la conoscenza.

Come afferma **Perkins**: *"La **conoscenza inerte** si trova in un **attico** della **mente**. Si scioglie solo quando in modo specifico è richiamata da un quiz o da una **sollecitazione** diretta."*
E come dice Philipe **Perrenoud**, *"La conoscenza non deve essere materia **inerte**, incapsulata all'interno delle discipline scolastiche, bensì materia **viva**, da mettere **in relazione** con le **esperienze** di vita e i problemi che **la realtà** pone."*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Emma Castelnuovo, “*Didattica della matematica*”, La Nuova Italia

E. Valenti, “*La matematica nella nuova scuola elementare*”, Le Monnier

D.Corno-G. Pozzo, “*Mente, linguaggio, apprendimento*”, La Nuova Italia

Mussen-Conger-Kagan, “*Linguaggio e sviluppo cognitivo*”, Feltrinelli

Guido Petter, “*Psicologia e scuola primaria*”, Giunti

Mosconi-D’urso, *“La soluzione dei problemi”,* Giunti-Barbera ’73

Keith Devlin, *L’istinto matematico*, Raffaello Cortina ‘07

Hans Freudenthal, “*Ripensando l’educazione matematica*”, La Scuola ’94

M. Castoldi, “*Insegnamento **muro** e **ponte***”, L’Educatore, n° 1, ‘08/’09