Il paradosso di Monty Hall

1. Chiedilo a Marilyn

Monty Hall è stato per diversi anni il conduttore di una popolare trasmissione televisiva americana *Let's Make a Deal*, basata sul seguente gioco a premi: a un concorrente vengono mostrate tre porte chiuse, indicate con numeri da 1 a 3; dietro una delle porte c'è un'automobile, dietro ciascuna delle altre due una capra. Il concorrente sceglie una delle porte e vince il premio che si trova al di là della porta.
Il gioco è diventato un celebre e discusso problema di calcolo delle probabilità quando nel settembre del 1990 un lettore della rubrica *Ask Marilyn* del *Parade magazine* tenuta da Marilyn Vos Savant (detentrice di un primato da Guinness per il quoziente d'intelligenza) pose la seguente domanda:

> "Supponi di essere in un gioco televisivo, e di dover scegliere tra tre porte. Dietro una porta c'è un'auto, dietro le altre una capra. Tu bussi a una porta, per esempio la numero 1, e il conduttore, che sa cosa c'è dietro ogni porta, apre un'altra porta, diciamo la numero 3, dietro la quale c'è una capra. Il conduttore ti chiede: -Vuoi cambiare porta?- Secondo te, è meglio cambiare o tenere la porta?"

Marilyn Vos Savant rispose che conveniva sempre cambiare, perché le probabilità di vincere l'auto salivano a 2/3.
L'episodio suscitò un grande scalpore; alla rivista arrivarono 10.000 lettere, tra cui quelle di matematici accademici: il 92% dei messaggi sostenevano che la risposta data da Marilyn era sbagliata.

> "Cara Marilyn, […] Se viene mostrata una porta perdente, questa informazione non cambia la probabilità delle altre porte da scegliere, poiché nessuna ha dei motivi per essere più fortunata dell'altra, ciascuna delle due porte rimanenti ha probabilità 1/2. In quanto matematico di professione, sono veramente stupito della mancanza di competenze matematiche nella gente comune. La prego di confessare il suo errore e in futuro cerchi di essere più prudente".

Robert Sachs, Ph. D., Gorge Mason University

> "Dopo che il conduttore svela una porta, hai una possibilità su due di indovinare. Se cambi la tua scelta, o se non cambi, la probabilità è la stessa. C'è abbastanza incompetenza in matematica in questo paese che non c'è bisogno del Q.I. più alto del mondo per continuare a propagarla. Vergognati!"

S.S., Ph. D., University of Florida

> "Ti consiglio di studiarti un manuale di calcolo delle probabilità prima di rispondere a una questione di questo tipo."

Charles Reid, Ph. D., University of Florida

> "Sei proprio in errore con la questione del game show, spero che ciò attiri l'attenzione sulla profonda crisi nazionale dell'educazione in matematica. Se ammetti di essere in errore, contribuirai in maniera costruttiva alla soluzione di questa deplorevole situazione. Quanti matematici arrabbiati ci vogliono per farti cambiare idea?"

E. Ray Bobo, Ph. D., Georgetown University

> "Ha fatto un errore, ma guardi l'aspetto positivo. Se tutti questi Ph.D. sono in errore, il paese si trova in una situazione veramente seria"

Evertt Barman, Ph.D., U.S. Army Reserch Institute

3. Un diagramma ad albero

Analizziamo il gioco con un diagramma ad albero.

Figura 1. Diagramma ad albero del gioco di Monty Hall.

Nella Fase 1 il concorrente sceglie una porta: ogni premio ha probabilità 1/3 di essere scelto.
Nella Fase 2 il conduttore mostra una capra:

a. se il concorrente ha scelto la capra 1 mostra la capra 2;
b. se il concorrente ha scelto la capra 2 mostra la capra 1;
c. se il concorrente ha scelto l'auto può scegliere se mostrare la capra 1 o la capra 2

Nella Fase 3 il concorrente cambia porta e vince il relativo premio.
Per il concorrente che cambia porta, la probabilità di vincere l'auto è 1/3+1/3=2/3, la probabilità di vincere la capra è 1/6+1/6=1/3.

3. Un esperimento

Il calcolo delle probabilità, com'è noto, si basa sulla valutazione *a priori* della riuscita di un certo evento. In realtà, quello che interessa, dal punto di vista pratico e scientifico, si pensi per esempio all'uso di una pillola o di un principio attivo contro una malattia o un sintomo indesiderato, è sapere in quanti casi la pillola funzionerà, per valutare se è il caso di prenderla o se lasciar perdere. Nel caso del gioco a premi, si vuole sapere in quanti casi, ripetendo sempre lo stesso gioco, i concorrenti che cambiano la porta scelta inizialmente vinceranno l'auto.
Per risolvere la questione si può fare una simulazione del gioco. Con una classe di studenti si può procedere in questo modo: si dividono gli studenti in coppie, in ogni coppia uno studente simula il conduttore televisivo e l'altro simula il concorrente. Invece di realizzare una coreografia da studio televisivo si può realizzare lo stesso gioco con mezzi poveri: tre carte opportunamente realizzate, due con il disegno di una capra e una con il disegno di un auto. Si possono anche utilizzare tre carte da gioco, tipo carte napoletane: due carte di cavallo e una carta di asso di denari, i due cavali rappresentano le capre, l'asso di denari corrisponde all'auto. O ancora tre bicchieri di plastica e una piccola macchinina, di quelle che si trovano negli ovetti di cioccolata.
Chi recita il ruolo del conduttore mischia le carte e le dispone sul tavolo facendo attenzione a come dispone i premi. Il concorrente invece non deve vedere dove sono i premi e sceglie a caso una carta. Il conduttore gira una carta con il seguente criterio: se il concorrente ha scelto l'auto, lui mostra una qualsiasi delle due carte con la capra; se il concorrente ha scelto una capra, lui mostra la carta con l'altra capra. Il concorrente cambia sempre la carta scelta inizialmente. Alla fine di ogni gioco si segna su un foglietto quante volte il concorrente ha vinto la capra e quante volte ha vinto l'auto.
Poiché la differenza tra chi pensa che la probabilità sia 1/2 (50%) e chi pensa che sia di 2/3 (66,67%) è abbastanza significativa, dovrebbe essere sufficiente un migliaio di prove per decidere chi ha ragione. Se si fa l'esperimento con una classe, dovrebbero essere sufficienti 50 esperimenti per ogni coppia di studenti.
Raccolti i risultati relativi al concorrente che cambia sempre porta, gli studenti possono cambiare di ruolo e simulare la situazione in cui il concorrente non cambia mai la carta scelta.
Su 500 esperimenti fatti con dei ragazzi ho trovato che il concorrente che cambia la carta scelta ha vinto 329 volte (65,8%) l'auto e 171 volte (34,2%) la capra.
In realtà, ripetendo il gioco molte volte ci si accorge che, se si usa sempre la strategia di cambiare carta, si vince ogni volta che inizialmente si è scelto una capra (2 su 3) e si perde ogni volta che inizialmente si è scelto l'auto (1 su 3).

5. Una simulazione

Un altro modo per decidere chi ha ragione è realizzare una simulazione del gioco con un algoritmo e far elaborare dal computer un numero sufficientemente elevato di casi. Nella figura 2 riporto l'algoritmo utilizzato.

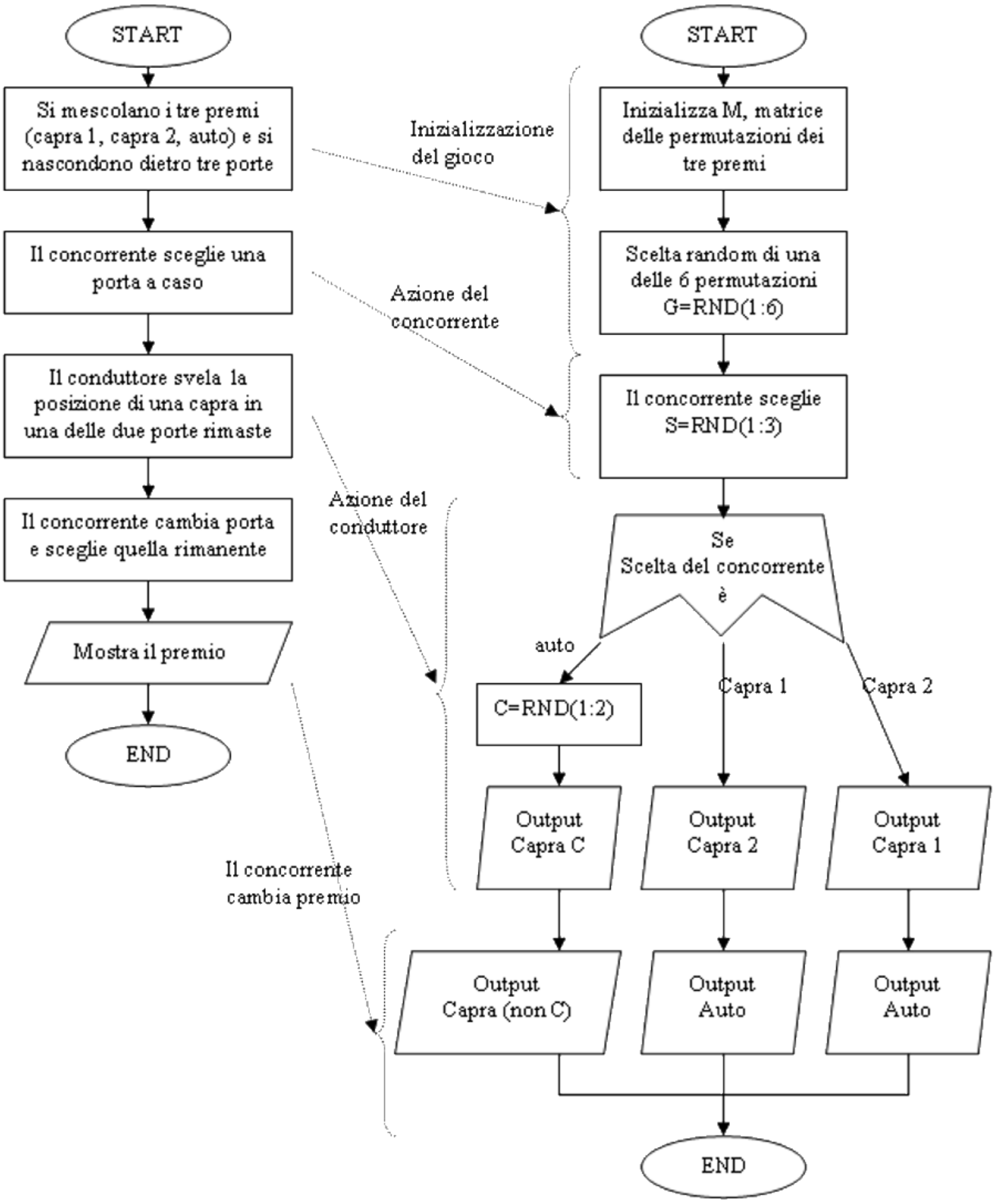

Figura 2. Algoritmo per la simulazione del gioco di Monty Hall

Questo algoritmo di base va ripetuto per un certo numero di volte, conservando in una variabile il numero di giocate e in un'altra variabile il numero di auto vinte.
Di seguito riporto il codice scritto per il software Matematica.

```
A:=Permutations[{capra1,capra2,auto}];MatrixForm[A]
```
Calcola le permutazioni dei tre premi.

```
Staf:=A[[Random[Integer,{1,6}]]]
```
Lo staff sceglie a caso una delle permutazioni possibili dei premi.

```
Giocatore:=Staf[[Random[Integer,{1,3}]]]
```
Il giocatore sceglie a caso uno dei tre premi.

```
Conduttore:=Switch[PortaSceltaGiocatore,capra1,capra2,
           capra2,capra1,auto,Switch[Random[
```

```
            Integer,{1,2}],1,capra1,2,capra2]]
```

Il conduttore sceglie una porta con il seguente criterio:

se il giocatore ha scelto la capra 1 mostra la capra 2,
se il giocatore ha scelto la capra 2 mostra la capra 1,
se il giocatore ha scelto l'auto sceglie a caso un numero tra 1 e 2 e mostra la capra 1 o la 2.

```
GiocatoreCambia:=Complement[Table[DisposizioneStaf],
            {PortaSceltaGiocatore},{PortaSceltaConduttore}]
```

Il giocatore sceglie il premio rimasto, dato dall'insieme complementare dei tre premi rispetto ai due premi già scelti.

Il blocco che simula il gioco per un certo numero di prove è il seguente

```
NumeroProve=100000;
Vincite=0;
For[i=1,i<NumeroProve+1,
  DisposizioneStaf=Staf;
  PortaSceltaGiocatore=Giocatore;
  PortaSceltaConduttore=Conduttore;PremioVinto=GiocatoreCambia;
  If[PremioVinto{auto},Vincite++];
  VinciteGiocatoreCheCambia[i]=N[Vincite*100/i];
  i++]
Print[Vincite]
```

In una simulazione con 100.000 prove, il giocatore che cambia la porta, vince 66.746 volte, cioè il 66,746%.

Rappresentiamo graficamente la funzione che esprime la percentuale del numero di vincite rispetto al numero di giocate.

```
  ListPlot[Table[VinciteGiocatoreCheCambia[x],{x,1,10000}]]
```

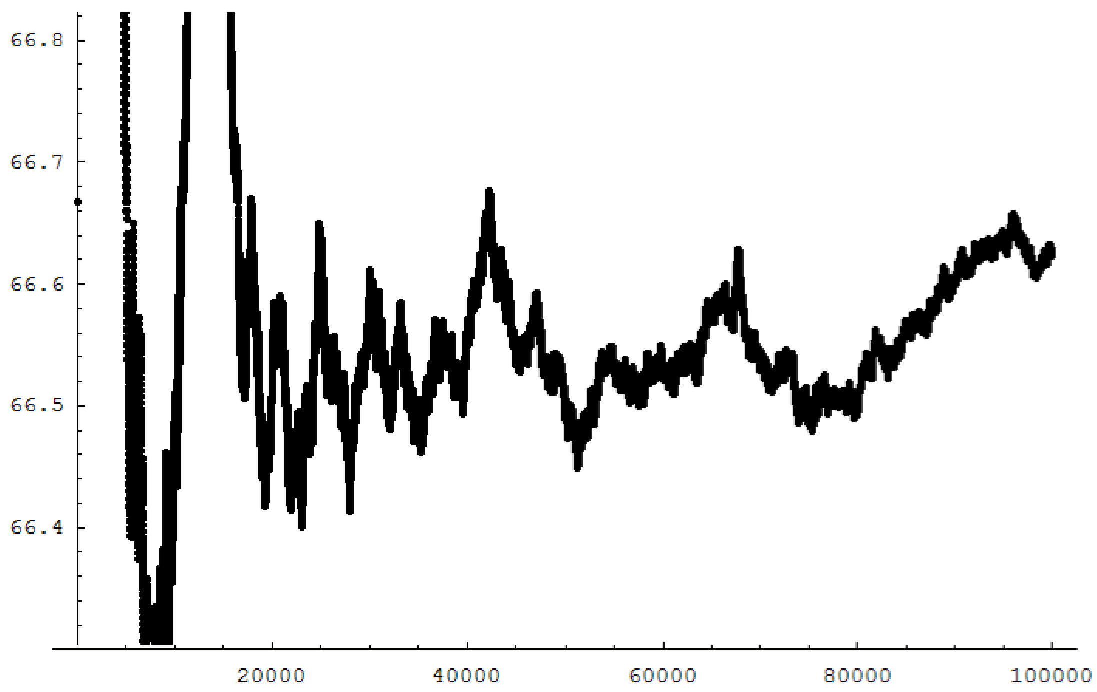

Figura 3. Il grafico della distruzione delle frequenze percentuali all'aumentare del numero di prove.

Dal grafico delle frequenze percentuali si nota che dopo alcune oscillazioni iniziali, la frequenza percentuale relativa all'evento "vincere l'auto" oscilla attorno a 66,6% come era stato previsto.
In conclusione qualche osservazione e qualche questione aperta.
L'argomento, per le circostanze reali da cui è nato, si presta a introdurre in classe una tematica interessante sul calcolo delle probabilità e offre uno spunto per mettere a punto un algoritmo e il conseguente programma in un linguaggio di programmazione qualsiasi. Per quella che è la mia esperienza, una situazione di questo tipo mette meglio in luce la necessità di fare chiarezza sul calcolo delle probabilità.
La seconda riflessione riguarda il ruolo dei matematici e delle loro certezze. La matematica presentata a scuola ha sempre l'aspetto do verità indiscussa. Mettere in luce una situazione, storicamente non tanto lontana visto che parliamo di meno di vent'anni fa, in cui una questione apparentemente semplice è stata oggetto di discussione anche aspra all'interno della comunità dei matematici accademici e tra matematici e 'gente comune' può mostrare una matematica dal volto 'umano' invece di una matematica rivelata.

Antonio Bernardo
www.matematicamente.it

Biblio/sitografia

http://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Monty_Hall.
Marylin vos Savant, The Power of Logical Thinking, St. Martin's Press, 1996.